

Quantenmechanik I. Übung 11.

HS 10

Abgabe: Di 14. Dezember 2010

1. Entartete Störungstheorie

In Aufgabe 10.2 haben wir gesehen wie der Formalismus der nicht-entarteten Störungstheorie versagt, wenn einige der Energieeigenwerte des ungestörten Systems entartet sind. Zur Illustration für die korrekte Behandlung entarteter Eigenwerte betrachten wir ein gestörtes Zweiniveausystem bei welchem eines der Niveaus entartet ist,

$$\begin{pmatrix} E & \lambda & 0 \\ \lambda & E & \lambda \\ 0 & \lambda & E' \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei $E \neq E'$ und $\lambda \ll |E - E'|$.

- i) Berechne die Energieeigenwerte störungstheoretisch bis einschließlich 2. Ordnung.
- ii) Wir wenden nun Störungstheorie in einer etwas unorthodoxen Art und Weise an: wir schreiben $H = H'_0 + \lambda V'$ mit

$$H'_0 = \begin{pmatrix} E & \lambda & 0 \\ \lambda & E & 0 \\ 0 & 0 & E' \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

In wiefern unterscheidet sich dieser Ansatz von dem Ansatz in i), d.h., $H_0 = H|_{\lambda=0}$?

- iii) Betrachte die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 2\lambda^2 x + \lambda^2 = 0. \quad (3)$$

Verwende i) um die Lösung der Gleichung bis zur 2. Ordnung in λ zu bestimmen.

2. Gestörter Harmonischer Oszillator

Sei $\hbar \equiv c \equiv \omega \equiv 1$. Betrachte den gestörten harmonischen Oszillator

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + gx^4$$

mit $g \ll 1$.

- a) Finde die Energieeigenwerte E_n mit Störungstheorie in erster Ordnung.
- b) Damit die Störungsreihe sinnvoll ist, brauchen wir

$$\left| \frac{gE_n^{(1)}}{E_n^{(0)}} \right| \ll 1.$$

Für welche Werte von n ist die Störungsreihe gültig?

c) Zeige dass die Standardabweichung

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

bei einem Zustand $|n\rangle$ proportional zu $\sqrt{2n+1}$ ist.

d) Kommentiere die Dominanz der Störung gx^4 gegenüber dem ungestörten Potential $\frac{1}{2}x^2$ für hohe Energieniveaus.