Quantenmechanik I. Übung 1.

HS 10 *Abgabe:* Di 5. Oktober 2010

1. Zur Hohlraumstrahlung

Ziel dieser Aufgaben und Ergänzungen ist es darzulegen, was Planck bekannt war, als er seine Untersuchungen zur Hohlraumstrahlung begann.

i) Die spektrale Energiedichte u des elektromagnetischen Felds ist im thermischen Gleichgewicht mit der Materie unabhängig von deren Beschaffenheit und von der Gestalt des Hohlraums: $u = u(\omega, T)$ ist eine universelle Funktion (*Kirchhoff* 1859). Denn: wäre $u^{(1)}(\omega, T) > u^{(2)}(\omega, T)$ in einem Frequenzbereich $I \ni \omega$ für zwei Hohlräume (1), (2) derselben Temperatur T, so könnte man diese über eine Filter verbinden, der nur in I durchlässig ist: (1) kühlt sich ab, (2) erwärmt sich; die spontane Bildung einer Temperaturdifferenz widerspricht aber dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

ii) Für die Energiedichte

$$u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega$$

gilt $u(T) \propto T^4$ (*Stefan* 1879 empirisch). Liefere die theoretische Begründung dazu (*Boltzmann* 1884) wie folgt:

- Der Energie-Impulstensor (s. Elektrodynamik) des e.m. Felds,

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) & \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \hline \vec{E} \wedge \vec{B} & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \end{array}\right) ,$$

  ist im Mittel für isotrope Strahlung von der Form

$$\bar{T}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} u & & 0 & \\ \hline & p & & \\ 0 & & p & \\ & & & p \end{array}\right) .$$

  Zeige: die Energiedichte u und der Druck p stehen in der Beziehung

$$p = \frac{u}{3} .$$

- Die Energie der Strahlung im Hohlraum ist $U(T, V) = V \cdot u(T)$. Bestimme mit Hilfe des 1. und 2. Hauptsatzes,

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} ,$$

  die partiellen Ableitungen der Entropie $S = S(T, V)$.

- Verwende $\partial^2 S/\partial T \partial V = \partial^2 S/\partial V \partial T$.

iii) Falls im Ausdruck für $u(\omega, T)$ nur die Naturkonstanten k, c vorkommen, so ist er von der *Rayleigh-Jeans* Form

$$u(\omega, T) = z\frac{\omega^2 kT}{c^3} \tag{1}$$

mit z einer dimensionslosen Konstanten (reine Zahl).

Hinweis: Beziehungen zwischen dimensionsbehafteten Grössen können nur Potenzgesetze sein.

iv) Eine experimentelle Abweichung gegenüber (1) (*Wien* 1896) erfordert nach (iii) (mindestens) eine neue Naturkonstante, $\hbar$. Zeige: $u(\omega, T)$ ist von der Form

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2 kT}{c^3} f(\hbar\omega(kT)^\gamma) \tag{2}$$

mit einer reinen Zahl γ und einer dimensionslosen Funktion f eines dimensionslosen Arguments.

Hinweis: Dimensionslose Kombinationen x_1, x_2 von u, ω, T sowie von k, c, $\hbar$ müssen in einer Beziehung $x_1 = f(x_2)$ stehen. Werden die Kombinationen und $\hbar$ geeignet gewählt, so resultiert (2).

v) Zeige: aus (ii) folgt $\gamma = -1$, also

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{c^3} \tilde{f}(\frac{\hbar\omega}{kT})$$

(mit $\tilde{f}(x) = f(x)/x$; *Wiensche Strahlungsformel* 1893). Folgere daraus das Wiensche Verschiebungsgesetz: Das Intensitätsmaximum liegt bei $\omega_0 \propto T$.

2. Plancks Strahlungsformel

Sei $S(E)$ die Entropie eines Oszillators (Resonators) der Energie E. Zeige:

i) Im Wienschen Grenzfall, wo $E = C\omega \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, gilt

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{k}{\hbar\omega}\frac{1}{E} \ .$$

Hinweis: Verwende die thermodynamische Beziehung $TdS = dE$.

ii) Nach der klassischen Boltzmannverteilung gilt hingegen

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{k}{E^2} \ .$$

iii) Plancks Abänderung von (i) oder, aus heutiger Sicht, Interpolation zwischen (i) und (ii) war

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{k}{E(E + \hbar\omega)} \ . \tag{3}$$

Zeige, dass dies auf

$$E(T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

führt und somit auf die Strahlungsformel (1.14).