Quantenmechanik I. Übung 9.

HS 10 *Abgabe:* Di 30. November 2010

1. Die Methode der stationären Phase

Betrachte das Integral

$$\int a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(p)}dp\ ,$$

wobei $a(p) > 0$ und $\varphi(p)$ glatte Funktionen sind und $\operatorname{supp} a$, der Träger von $a(p) > 0$, kompakt ist. Die Beiträge von $a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(p)}dp$ zum Integral interferieren destruktiv, wenn $\varphi(p)$ stark mit p variiert. Wird die Phase jedoch an einem Punkt $p_0 \in \operatorname{supp} a$ stationär,

$$\varphi'(p_0) = 0\ ,$$

so ist die Interferenz für Werte p nahe bei p_0 konstruktiv.

Hinweis: Allgemeines zur Methode der stationären Phase in Anhang C.

i) Die zeitliche Entwicklung eines Wellenpakets in Dimension 1 ist

$$\psi(x,t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{px}{\hbar} - \frac{p^2 t}{2m\hbar} + \alpha(p))}\ , \tag{1}$$

wobei die Polarzerlegung von $\hat{\psi}(p) = a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(p)}$, $(a(p) > 0, \alpha(p) \in \mathbb{R})$ verwendet wurde. Der Träger der Funktion $a(p)$ sei ein enger Bereich um p_0. Zeige, dass das Paket zum Zeitpunkt t um $x(t) = x_0 + p_0 t/m$ konzentriert ist und somit einer Trägheitsbahn folgt.

ii) Betrachte ein Potential wie in Aufgabe 5.2, sowie ein von links einlaufendes Wellenpaket

$$\psi(x) = \int_0^\infty a(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(p)}\psi_E(x)dp\ ,$$

wobei

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} + r(E)\mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\ , & (x < -x_*) \\ t(E)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\ , & (x > x_*)\ , \end{cases}$$

mit $E = p^2/2m$, $(p > 0)$ und $p_0 \in \operatorname{supp} a$.

a) $t \to -\infty$: Zeige, dass sich das Wellenpaket $\psi(x,t)$ im Wesentlichen auf $x < -x_*$ beschränkt und sich dort, wie das Paket aus i), nach rechts bewegt.

b) $t \to +\infty$: Zeige, dass das Wellenpaket aus zwei Paketen besteht, von denen eines in $x < -x_*$ nach links läuft und das andere in $x > x_*$ nach rechts läuft. Bestimme die Bahn des nach rechts laufenden Pakets. Um wie viel Zeit hinkt diese Bahn jener des freien Wellenpakets hinterher?

Hinweis: Die Verzögerung ist eine Funktion der Phase $\delta(E)$ von $t(E) = |t(E)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta(E)}$.

2. Teilchen in der Ebene mit transversalem magnetischem Feld

Betrachte den Hamiltonoperator aus Aufgabe 8.2,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}))^2 \qquad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^2) ,$$

mit einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, aber ohne eine Eichung festzulegen.

i) Man überlege sich (z.B. auf der Grundlage von Physik I), dass sich das Teilchen klassisch auf einem Kreis bewegt. Drücke den Mittelpunkt (Führungszentrum) $\vec{r}$ durch den Ort $\vec{x}$ und den kinematischen Impuls $\vec{\pi} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}$ aus.

ii) Erhebe die Komponenten $\vec{r} = (r_1, r_2)$ und $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ zu Operatoren und berechne $[\pi_i, \pi_j]$, $[r_i, r_j]$, $[\pi_i, r_j]$.

iii) Zeige, dass $\vec{r}$ erhalten ist: $[H, r_i] = 0$, $(i = 1, 2)$. Bestimme ohne weitere Rechnungen das Spektrum von H.

3. Bornsche Näherung

Berechne den differentiellen Wirkungsquerschnitt in erster Bornscher Näherung (5.13) für das Yukawa-Potential

$$V(r) = -\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{-\mu r}$$

mit $\mu \geq 0$ ($\mu = 0$ entspricht dem Coulomb-Potential). Vergleiche das Resultat für die Streuung zweier Teilchen der Ladungen e_1, e_2 mit dem Rutherford-Querschnitt aus der Allgemeinen Mechanik.

Hinweis: Zeige und verwende

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x = \frac{4\pi}{\vec{q}^{\,2} + \mu^2} \ . \tag{2}$$