# Quantenmechanik I. Übung 6.

*HS 10* *Abgabe:* Di 9. November 2010

### 1. Zerfliessen eines Wellenpakets

Berechne die zeitliche Evolution $\psi(\vec{x}, t)$ eines freien Teilchens im $\mathbb{R}^3$ mit Anfangszustand $(t = 0)$

$$\psi(\vec{x}) = \mathrm{e}^{-\vec{x}^2/4\Delta^2} \ .$$

Wie gross ist die Breite $\Delta(t)$ des Wellenpakets zur Zeit $t$?

*Hinweis:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-(ax^2+bx)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{b^2/4a}$$

für $a, b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, a > 0$; $\sqrt{a}$ ist dabei eindeutig festgelegt durch $\mathrm{Re}\sqrt{a} > 0$.

### 2. Rechnen mit Kommutatoren

Zeige, dass der Erwartungswert der Drehimpulskomponenten $L_1$ und $L_2$ in jedem Eigenzustand von $L_3$ verschwindet.

*Hinweis*: $[L_{i+1}, L_{i+2}] = i\hbar L_i$, s. Aufgabe 4.1 (iii).

### 3. Energie-Zeit Unschärferelation

In scheinbarer Ähnlichkeit zur Ort-Impuls Unschärferelation, $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$, findet man in der Literatur die Behauptung

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

Ihre Deutung ist dadurch erschwert, dass es in der Quantenmechanik keine Observable "Zeit" gibt. Hier sind zwei mögliche Deutungen (beide Mandelshtam, Tamm 1945).

i) Der Erwartungswert einer Observablen $A$ ändert sich mit der Rate $\dot{A} := d\langle A\rangle_{\psi_t}/dt$. Die Zeit $t$ (so die Interpretation) ist die, bei der $A$ einen bestimmten Wert über- oder unterschreitet. Da die Messung von $A$ einer Schwankung $\Delta A$ unterliegt, ist

$$\Delta t := \frac{\Delta A}{|\dot{A}|} \ .$$

Zeige (1).

ii) Ein Zustand $|\psi_0\rangle$ entwickelt sich gemäss der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \ . \tag{2}$$

Seit $t_0 > 0$ eine Zeit, die $|\psi_t\rangle$ mit Sicherheit vom Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ unterscheidbar macht:

$$\langle\psi_0|\psi_{t_0}\rangle = 0 \ .$$

Zeige:

$$\Delta E \cdot t_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \ .$$

*Hinweise:* Schätze $|\dot{f}(t)|$ ab für $f(t) = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2$. Die Rechnung führt auf $\langle\psi_t|\,[P,H]\,|\psi_t\rangle$ mit $P = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$; verwende dafür die Unschärferelation (3.23). Benutze schliesslich den Vergleich

$$\dot{f}(t) \geq g(f(t)),\ \dot{f}_0(t) = g(f_0(t)),\ f(0) = f_0(0) \quad \Longrightarrow \quad f(t) \geq f_0(t),\ (t \geq 0)\ . \tag{3}$$

iii) Umgekehrt hat Deutung (ii) ein Gegenstück für Ort und Impuls, z.B. in Dimension 1: Sei $|\psi_x\rangle$ der um $x$ verschobene Zustand $|\psi_0\rangle$ und $x_0$ so, dass $\langle\psi_0|\psi_{x_0}\rangle = 0$. Zeige:

$$\Delta p \cdot x_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \ .$$

*Hinweis:* Wähle $H$ passend in Gl. (2).

**4. Streuung und Ohmsches Gesetz**

Ladungsträger (Elektronen) der Ladung $e$ treffen in einer Dimension auf einen Streuer mit Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $R$ und $T$. Dieser weist einen elektrischen Widerstand (Landauer 1970)

$$\rho = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{R}{1-R} = \frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{1-T}{T}$$

auf ($2\pi\hbar/e^2 = 25.812\,\mathrm{k}\Omega$) (Genauer: $R = R(E_F)$ mit Fermi-Energie $E_F$; Begründung verfrüht).

i) Zwei Streuer, 1 und 2, seien durch eine Strecke $l$ getrennt. Zeige

$$\frac{1-T_{12}}{T_{12}} = \frac{R_1 + R_2 - 2\sqrt{R_1R_2}\cos\theta}{T_1T_2} \ ,$$

wobei nur $\theta$ von $l$ abhängt. Berechne so den Widerstand $\rho_{12}$ beider Streuer zusammen (Schaltung in Serie).

*Hinweise:* Wie ändert sich die Streumatrix, wenn ein Streuer um $l$ verschoben wird ($V(x) \rightsquigarrow V(x-l)$)? Verwende danach das Ergebnis von Aufgabe 5.2(v).

ii) Berechne den Mittelwert über $l$ (wieder mit $\rho_{12}$ bezeichnet). Das Ergebnis ist

$$\rho_{12} = \rho_1 + \rho_2 + \frac{e^2}{\pi\hbar}\rho_1\rho_2 \ . \tag{4}$$

Beachte die Abweichung von der aus der Elektrizitätslehre bekannten Formel $\rho_{12} = \rho_1 + \rho_2$.

iii) Ein ungeordnetes Medium kann grob modelliert werden durch identische Streuer, die in zufälligen Abständen angeordnet sind. Sei $\rho(x)$ der Widerstand einer Strecke $x$, die viele Streuer enthält, und $k = \lim_{x\to 0}\rho(x)/x$ der Widerstand pro (makroskopische) Längeneinheit. Begründe die Differentialgleichung

$$\frac{d\rho}{dx} = k\big(1 + \frac{e^2}{\pi\hbar}\rho(x)\big) \tag{5}$$

und löse sie. Zeige, dass für $kx \ll \pi\hbar/e^2$ der übliche lineare Verlauf von $\rho(x)$ gilt; für grössere $x$ aber einen exponentiellen.