Quantenmechanik I. Übung 4.

HS 10 *Abgabe:* Di 26. Oktober 2010

1. Rechnen mit Kommutatoren

i) Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen oder Operatoren A, B ist linear in A, B und antisymmetrisch: $[B, A] = -[A, B]$. Zeige die Produktregel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

und die Jacobi-Identität,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \ .$$

ii) Ausgehend von $(\mathrm{i}/\hbar)[P, X] = 1$ zeige, dass für Polynome $f(x), g(p)$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[P, f(X)] = f'(X) \ , \qquad \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[g(P), X] = g'(P)$$

gilt, wobei $f(X), g(P)$ über Summen und Produkte von Matrizen definiert sind.

iii) Leite die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses $\vec{L}$ her: Zeige, dass die Komponenten $L_i = X_{i+1}P_{i+2} - X_{i+2}P_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3 \mod 3$) den Vertauschungsrelationen

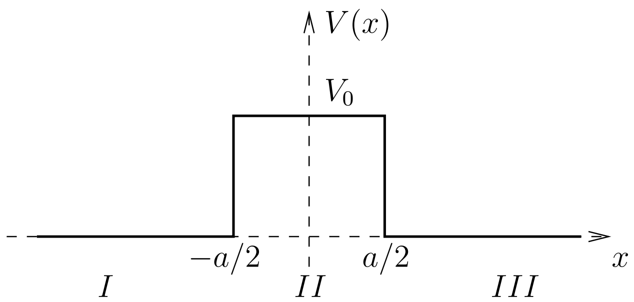
$$[L_{i+1}, L_{i+2}] = \mathrm{i}\hbar L_i$$

genügen. *Hinweis:* $(\mathrm{i}/\hbar)[P_i, X_j] = \delta_{ij}$.

2. Bewegung auf der Geraden

Ein Teilchen der Energie E läuft von $x = -\infty$ gegen das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & (|x| \geq a/2) \\ V_0 \ , & (|x| < a/2) \end{cases} \qquad (a > 0, \ V_0 > 0) \ .$$



Löse die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung $H\psi = E\psi$ mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & &(x < -a/2) \ , & k &= k(E) \\ \psi_{II}(x) &= A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} + B_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx} & &(|x| < a/2) \ , & l &= l(E, V_0) \\ \psi_{III}(x) &= A_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} & &(x > a/2) \ . & & \end{aligned}$$

Berechne den Transmissions- ($T = |A_3/A_1|^2$) und Reflexionskoeffizienten ($R = |B_1/A_1|^2$) in den beiden Fällen (a) $0 < E < V_0$ und (b) $0 < V_0 < E$, mit dem Ergebnis: Es ist $R + T = 1$ und

$$T(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}a\right)}$$

im Fall (a); und mit den Ersetzungen $V_0 - E \rightsquigarrow E - V_0$, $\sinh \rightsquigarrow \sin$ im Fall (b).

Hinweise: Bei $x = \pm a/2$ sind $\psi(x)$ und $d\psi/dx$ stetig. Im Fall (a) ist l rein imaginär.

Skizziere den Verlauf von $T(E)$. Klassisch wäre (a) $T(E) = 0$, (b) $T(E) = 1$. Im Unterschied dazu ist quantenmechanisch (a) $T(E) > 0$ (Tunneleffekt) und (b) $T(E_n) = 1$ nur für bestimmte Energien E_n (Transmissionsresonanzen). Welche? Was passiert für $\hbar \to 0$?

3. Galilei-Transformation und Schrödinger-Gleichung

i) Unter einer Galilei-Transformation $O' \to O$ transformieren Ort und Impuls gemäss

$$\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{u}t \ , \qquad \vec{p} = \vec{p}\,' + m\vec{u} \ , \tag{1}$$

wobei $\vec{u}$ die Geschwindigkeit von O' bezüglich O ist. Die Transformation der Wellenfunktion kann wie folgt heuristisch gefunden werden: Bis auf eine noch zu bestimmende Phase $e^{i\alpha/\hbar}$ ist

$$e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} \to e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{u}t)/\hbar} \cdot e^{i\alpha/\hbar} = e^{i[(\vec{p}\,'+m\vec{u})\cdot(\vec{x}-\vec{u}t)+\alpha]/\hbar} \ . \tag{2}$$

Bestimme $\alpha = \alpha(\vec{u}, t)$ (unabhängig von $\vec{p}$) auf eine der folgenden Weisen:

• Falls die Galilei-Transformation (1) mit einer weiteren, $\vec{p}\,' = \vec{p}\,'' + m\vec{v}$, zusammengesetzt wird, so ist die resultierende Phase in $e^{i\vec{p}\,''\cdot\vec{x}\,''/\hbar} \to e^{i\phi/\hbar}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ dieselbe wie die der einen Transformation $\vec{p} = \vec{p}\,'' + m(\vec{v} + \vec{u})$.

• Eine Funktion $S(\vec{p}\,', \vec{x}, t)$ stiftet eine kanonische Transformation $(\vec{p}\,', \vec{x}\,') \to (\vec{p}, \vec{x})$, sofern die Auflösung der Gleichungen

$$\vec{x}\,' = \frac{\partial S}{\partial \vec{p}\,'} \ , \qquad \vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \tag{3}$$

nach $\vec{p}, \vec{x}$ möglich ist. Dabei ist $H' = H + (\partial S/\partial t)$. Beachte, dass $S_0 = \vec{p}\,' \cdot \vec{x}$ die Identität $\vec{x}\,' = \vec{x}, \vec{p}\,' = \vec{p}$ stiftet. Fasse (2) als $e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} \to e^{iS(\vec{p}\,',\vec{x},t)/\hbar}$ auf. Zeige, dass S (1) stiftet und bestimme α derart, dass $S = S_0$ für $\vec{u} = 0$ und allgemein $H' = \vec{p}\,'^2/2m$ für $H = \vec{p}\,^2/2m$.

Hinweis: Das Ergebnis ist $\alpha(\vec{u}, t) = m\vec{u}\,^2 t/2$.

ii) Zeige, dass (2) auf ein Wellenpaket

$$\psi'(\vec{x}\,', t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \hat{\psi}'(\vec{p}\,', t) e^{i\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'/\hbar} d^3p'$$

angewandt die quantenmechanische Galilei-Transformation

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi'(\vec{x} - \vec{u}t, t) e^{\frac{i}{\hbar}m(\vec{u}\cdot\vec{x} - \vec{u}\,^2 t/2)}$$

liefert. Verifiziere schliesslich die diesbezügliche Invarianz der freien Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \ :$$

ψ ist eine Lösung, falls ψ' eine ist.

Hinweis: Die Lösung von Teil (ii) erfordert jene von Teil (i) nicht, sondern nur dessen Ergebnis.