Allgemeine Mechanik
Serie 11

Aufgabe 11.1 Zeitabhängige kanonische Transformationen

In Kapitel 6.4 des Skriptes wurde gezeigt, dass die Form der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen im Phasenraum,

$$\sum_{k=1}^{2f} \epsilon_{ik} \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1}$$

unter zeitunabhängigen kanonischen Transformationen $x_i = x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2f})$ erhalten bleibt. In Abschnitt 6.8.1 wurden zeitabhängige Transformationen $x_i = x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2f}, t)$ betrachtet, wobei angenommen wurde, dass auch unter solchen Transformationen wieder kanonische Bewegungsgleichungen gelten, jedoch zu einem neuen Hamiltonian $K(\bar{x}(t), t)$. Zeige, dass dies gilt. Dazu zeige zuerst, dass in transformierten Koordinaten

$$\sum_{k=1}^{2f} \epsilon_{ik} \dot{\bar{x}}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}_i} + f_i(\bar{x}, t) \tag{2}$$

gilt, und verwende, dass wenn $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{x}_i}$ ist, eine Funktion g existiert so dass $f_i = \frac{\partial g}{\partial \bar{x}_i}$.

Aufgabe 11.2 Virialsatz

Seien $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^f$ die Phasenkoordinaten eines mechanischen Systems mit Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + V(\mathbf{q}) \equiv T + V$, wobei $(\cdot, \cdot)$ ein positiv-definites Skalarprodukt im $\mathbb{R}^f$ und V homogen vom Grad $-n$ sei: $V(k\mathbf{q}) = k^{-n} V(\mathbf{q})$.

a.) Zeige, dass $F = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{f} p_i q^i$ den kanonischen Fluss $\Phi^\lambda : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathrm{e}^\lambda \mathbf{q}, \mathrm{e}^{-\lambda} \mathbf{p})$ erzeugt.

b.) Leite daraus die Gleichung $\{F, H\} = -2T - nV$ her.

c.) Beweise, dass daraus für gebundene Bahnen (d.h. $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$ beschränkt) folgt:

$$2\overline{T} + n\overline{V} = 0 \,, \tag{3}$$

wobei $\overline{A} \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{+t} A\big(\mathbf{q}(t'), \mathbf{p}(t')\big)\, dt'$ der Mittelwert der Grösse $A(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ entlang der Bahn ist.

d.) Zeige, dass es für $n = 2$ nur gebundene Bahnen zur Energie $E = 0$ geben kann und dass sonst für gebundene Bahnen gilt (Virialsatz):

$$\overline{V} = \frac{2}{2-n} E, \quad \overline{T} = -\frac{n}{2-n} E \,. \tag{4}$$

e.) Sei $0 < n < 2$. Zeige: nur für Energien $E < 0$ kann es gebundene Bahnen geben. Für Bahnen mit $E > 0$ ist $(\mathbf{q}, \mathbf{q}) > nEt^2 + O(t)$ für $t \to \pm\infty$.

f.) Was gilt für gebundene Bahnen eines konservativen schwingenden Systems? Was für ein N-Teilchensystem, dass gravitativ wechselwirkt?