Allgemeine Mechanik
Serie 8

Aufgabe 8.1 Pendel-Oszillator

Ein vertikal schwingender harmonischer Oszillator mit Masse m_1 wird durch die Bewegung $A \cos \Omega t$ des Aufhängepunktes der Feder angeregt. An der Masse m_1 hängt ein ebenes Pendel mit Masse m_2 und Pendellänge l.
Stelle die zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen für ϵ und θ auf. ϵ entspricht dabei der Auslenkung der Masse m_1 aus der Ruhelage, d.h. $\epsilon = 0$, wenn Federkraft und Gewichtskraft sich gerade aufheben.
Vereinfache die Bewegungsgleichungen unter der Annahme, dass $m_1 \gg m_2$ und die Auslenkung θ klein ist.
Tipp: Bestimme das Potential des Systems schrittweise, indem du von einem vertikalen harmonischen Oszillator ausgehst und dann das Modell um die Anregung und schliesslich um das Pendel ergänzt. Bestimme dabei jeweils die potentielle Energie als Funktion der Auslenkung ϵ aus der Ruhelage und θ.

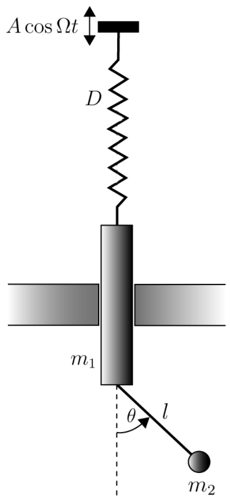

Abbildung 1: Pendel-Oszillator

Aufgabe 8.2 Legendretransformation

Die Hamiltonfunktion eines Systems von Massenpunkten mit f Freiheitsgraden sei $H(q_i, p_i)$, $i = 1, ..., f$, wobei q_i der Lagekoordinate und p_i dem konjugierten Impuls entspricht.

a.) Berechne die Lagrangefunktion L des Systems. Von welchen Variablen soll L abhängen?

b.) Wende die Rechnung aus Teil a.) auf ein relativistisches Teilchen mit Ladung e in einem konstanten elektrischen Feld $\mathbf{E}$ an, wobei

$$H = c\sqrt{(mc)^2 + \mathbf{p}^2} + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \tag{1}$$

Setze L in die Euler-Lagrange Gleichungen ein und betrachte den Limes für $v/c \ll 1$. Vergleiche mit dem nicht-relativistischen Fall.