ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Allgemeine Mechanik
Serie 3

HS 10
Prof. R. Renner

Aufgabe 3.1 Keplergesetze und Newtonsche Gravitation

In der Vorlesung wurden die Keplergesetze der Planetenbewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet. Hier soll der umgekehrte Weg beschritten werden: Leite das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den drei Keplerschen Gesetzen her! Benutze dabei zunächst die beiden ersten Keplergesetze um zu zeigen, dass es sich bei der Gravitationskraft um eine Zentralkraft handelt und dass die Bahn eines Planeten

$$F_{\mathbf{r}} = -\alpha \,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{1}$$

erfüllt, wobei α positiv und konstant ist. Zur Erinnerung sind die Keplergesetze hier nochmals erwähnt (Bezeichnungen wie in der Vorlesung):

- Die Planetenbahnen sind (ebene) Ellipsen mit Exzentrizität ϵ, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\ \cos[\phi]},\ \text{wobei } a \text{ die grosse Halbachse ist.} \tag{2}$$

- Der Verbindungsvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen:

$$r^2\,\dot{\phi} = C_1 = \text{const.} \tag{3}$$

- Für alle Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der grossen Halbachsen:

$$\frac{T^2}{a^3} = C_2 = \text{const.} \tag{4}$$

Aufgabe 3.2 Rutherford-Streuung

Ein Strahl von α-Teilchen bewegt sich auf ein positiv geladenes Pb-Ion. Die α-Teilchen werden aufgrund der repulsiven elektrostatischen Wechselwirkung durch das Ion gestreut. Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Streuquerschnitt $\sigma(\Omega)$ zu berechnen, der wie folgt definiert ist:

$$\sigma(\Omega)\,d\Omega = \frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen pro Raumwinkel } d\Omega \text{ und pro Zeiteinheit}}{I_0}, \tag{5}$$

wobei I_0 die Intensität des einfallenden Strahl (= Anzahl Teilchen pro Flächen- und Zeiteinheit) sei. Da Pb-Ionen viel schwerer sind als α-Teilchen, können wir davon ausgehen dass das Pb-Ion stationär ist. Der einfallende Strahl kann als symmetrisch um seine Bahn-Achse angenährt werden. Wir definieren das elektrostatische Potential V als

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}. \tag{6}$$

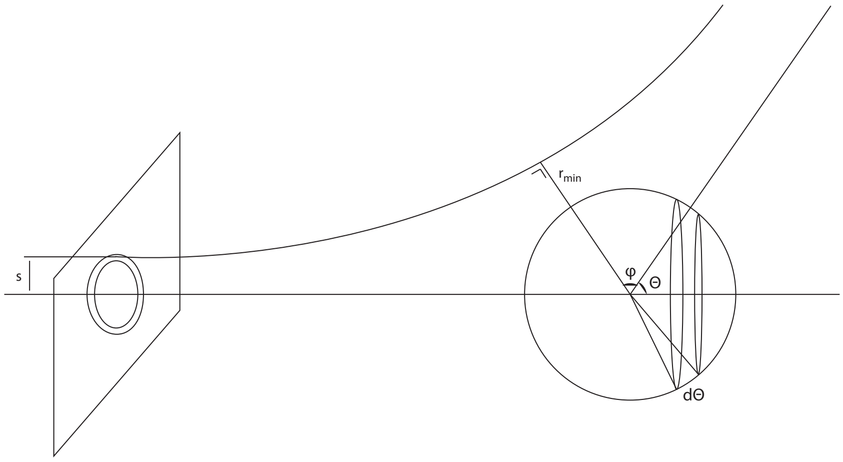

Abbildung 1:

a.) Benutze die Teilchenzahlerhaltung, um den Streuquerschnitt als Funktion von $\frac{ds}{d\theta}$ zu schreiben. Wir nehmen hier an, dass die verschiedenen Werte des Stossparameters s nicht zu dem gleichen Winkel θ führen können.

b.) Schreibe den Drehimpuls als Funktion von Energie, Masse und Stossparameter s.

c.) Benutze den Erhaltungssatz von Energie und Drehimpuls um die minimale Distanz r_{min} (siehe Figur 1) zwischen α-Teilchen und Ion zu finden. (Verifiziere dass die radiale Geschwindigkeit bei r_{min} gleich null ist).

d.) Berechne den Winkel $\theta(s)$. Benutze dazu Formel (2.1.14) vom Skript.

i.) Verifiziere dass

$$\theta(s) = \pi - 2\phi \tag{7}$$

$$\phi = \int_{r_{\mathrm{min}}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2m\alpha}{l^2 r}}}. \tag{8}$$

ii.) Berechne das Integral. Benutze die Resultate aus (b) und (c).

e.) Schreibe Stossparameter s als Funktion von θ, und finde σ. Benutze dazu das Resultat aus (a).