Allgemeine Mechanik
Serie 2

Aufgabe 2.1 Rotationen

a.) Sei $\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{y}$ mit festem Vektor $\mathbf{y}$ und $R(t)$ eine zeitabhängige Rotation, also $R(t) \in SO(3)$. Zeige, dass $\dot{\mathbf{x}} = \Omega\mathbf{x}$ gilt, wobei sich die lineare Abbildung $\Omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als $\Omega\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$ schreiben lässt. Den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ nennt man Winkelgeschwindigkeit.

b.) Die Rotation $R(\phi) \in SO(3)$ ist stetig in ϕ und kann daher für kleine ϕ (um $\phi = 0$) entwickelt werden:

$$R(\phi) = \mathbf{I} + \Omega\phi + \mathcal{O}(\phi^2), \tag{1}$$

wobei $\mathbf{I}$ die Identitätsmatrix bezeichnet. Die lineare Abbildung Ω nennt man die Erzeugende infinitesimaler Rotationen. Eine endliche Drehung lässt sich als Produkt unendlicher vieler infinitesimaler Rotationen auffassen. Zeige, dass gilt:

$$R(\phi) = \exp(\Omega\phi). \tag{2}$$

Aufgabe 2.2 Foucault'sches Pendel

Betrachte ein Foucault'sches Pendel mit Fadenlänge l an einem Ort mit geographischer Breite ϕ. Die Beschreibung soll wie in der Vorlesung im Koordinatensystem mit Ursprung P und Koordinatenachsen $\mathbf{y}$ (siehe Abbildung) erfolgen.

a.) Zeige, dass die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen (y_1, y_2) des Massenpunktes zu führender Ordnung in $\omega \ll \sqrt{g/l}$

$$\ddot{y}_1 = 2\omega \sin\phi\, \dot{y}_2 - \frac{g}{l} y_1 \tag{3}$$

$$\ddot{y}_2 = -2\omega \sin\phi\, \dot{y}_1 - \frac{g}{l} y_2 \tag{4}$$

sind. Hierbei ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

b.) Für $t = 0$ sei $\dot{\mathbf{y}} = 0$. Wie gross ist die Periode T?

c.) Sei die Anfangsbedingung wie in b. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Schwingungsebene? Was erhalten wir falls $\omega \to 0$?

Tipp:

- Teilaufgabe a: Die Bewegungsgleichungen eines frei fallenden Körpers im erdfesten Koordinatensysten $(P, \mathbf{y})$ wurden in der Vorlesung besprochen. Füge die Zwangskraft des Fadens hinzu und entwickle bis zur ersten Ordnung im Auslenkungswinkel α.

- Teilaufgabe b: Fasse mittels $z = y_1 + iy_2$ die beiden Gleichungen (3) und (4) zu einer komplexen zusammen und löse diese.

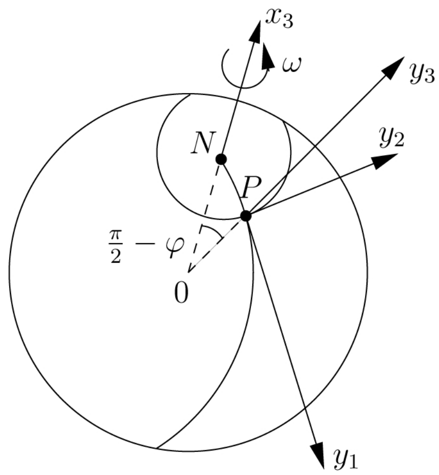

Abbildung 1: Lage des erdfesten Koordinationsystems $(P, \mathbf{y})$

Aufgabe 2.3 Raketen

Raketen werden durch den Impuls der ausgestossenen Gase angetrieben. Da diese Gase Reaktionsprodukte des Treibstoffes sind, ist die Masse der Rakete nicht konstant, sondern nimmt in dem Mass ab, wie der Treibstoff verbraucht wird.

a.) Zeige, dass die Bewegungsgleichung für die Rakete, die in einem homogenen Gravitationsfeld bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes senkrecht nach oben geschossen wird, die Form

$$m(t)\frac{dv(t)}{dt} = -v_{\text{ausstoss}}\frac{dm}{dt} - m(t)g \tag{5}$$

hat, wobei m(t) die Masse der Rakete und $v_{\text{ausstoss}} = \text{const.}$ die Geschwindigkeit der austretenden Gase relativ zur Rakete ist. g ist die Schwerebeschleunigung.

b.) Integriere diese Gleichung, d.h. bestimme v als Funktion der Zeit t, wobei die Masse der Rakete linear mit der Zeit abnimmt.