# Thermodynamik
# Serie 12



## Aufgabe 12.1 Verbesserte barometrische Höhenformel

Wir berechnen die barometrische Höhenformel unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Temperatur in der Atmosphäre von der Höhe abhängt. Verwende die ideale Gasgleichung, um die Atmosphäre zu beschreiben, benutze die Zustandsgleichung für adiabatische Zustandsänderungen des idealen Gases

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

mit $\gamma = c_p/c_v$. Die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht lautet

$$\frac{d\vec{F}}{dm} = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$$

mit $\vec{F}$ der Gravitationskraft, $p$ dem Druck und $\rho$ der Dichte.
Schreibe die Gleichungen so um, dass das Potential an Stelle der Kraft verwendet werden kann, setze die Randbedingung $p(0) = p_0$, $\rho(0) = \rho_0$ wobei $z = 0$ die Erdoberfläche ist. Berechne Druck, Dichte und Temperatur als Funktion der Höhe $z$.

## Aufgabe 12.2 Polytrope Sterne

Wir befassen uns mit einem Stern, für den eine polytrope Zustandsgleichung der Form

$$p = K\rho^\gamma. \tag{1}$$

gilt, wobei z. Bsp. $\gamma = 5/3$ der nichtrelativistische und $\gamma = 4/3$ der ultrarelativistische Grenzfall eines Elektronengases bei $T = 0$ ist. Dies beschreibt einen weissen Zwerg, in dem der Druck durch das Pauli-Prinzip für die Elektronen entsteht, die Masse aber hauptsächlich von den Nukleonen herrührt.

- Berechne die Beziehung zwischen Masse und Radius eines polytropen Sterns. Die Bedingung der mechanischen Stabilität (aus der Hydrostatik) lautet $p'(r) = -1/r^2 \cdot GM(r)\rho(r)$, die Masse bis zum Radius $r$ ist gegeben durch $M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r)$. Die Randbedingungen sind die Dichte des Sterns im Zentrum $\rho(0) = \rho_0$ und (begründe dies) $\rho'(0) = 0$.
  Führe dimensionslose Koordinaten

  $$r = \left(\frac{K}{4\pi G}\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{\gamma}{2}-1}\xi$$
  $$\rho = \rho_0 \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

  ein, um die Lane-Emden Differentialgleichung

  $$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0$$

  zu erhalten. Leite nun die Beziehung zwischen Masse und Radius des Sterns her, von der Lösung der Differentialgleichung brauchen wir nur die erste Nullstelle $\xi_1$ und die Ableitung an diesem Punkt, $\theta'(\xi_1)$.

- Die Stabilität eines Sterns ist nicht einfach zu berechnen, wir nehmen darum nun vereinfachend eine konstante Dichte $\rho$ zusammen mit der Zustandsgleichung (1) an. Der Zusammenhang zwischen der kinetischen Energiedichte und dem Druck soll von der Form
$$u = \frac{1}{\gamma' - 1} p$$
sein, wobei $\gamma' = 5/3$ gilt für ein beliebiges nichtrelativistisches Gas, $\gamma' = 4/3$ für ein Gas aus effektiv masselosen Teilchen (insbesondere ein Photonengas). Die Beziehung zwischen $u$ und $p$ hat nicht diese Form für ein Gas, dessen Ruheenergie vergleichbar ist mit der kinetischen Energie. Wir nehmen hier an, dass $\gamma' = \gamma$ gilt.
Berechne die kinetische Energie $T = \int_0^R 4\pi r^2 u(r) dr$ und die potentielle Energie $V = \int_0^R (-1/r) GM(r)(4\pi r^2 \rho dr)$ des Sterns und überprüfe, ob die Energie $E = T+V$ ein stabiles Extremum bezüglich der Dichte $\rho$ aufweist.

Unsere Betrachtungen setzen implizit voraus:

- Die Entropie pro Nukleon soll im ganzen Stern gleich sein. Dies ist in der Realität (näherungsweise) der Fall für weisse Zwerge oder Neutronensterne und für Sterne, in denen Energie am effizientesten durch Konvektion transportiert wird .

- Die chemische Zusammensetzung des Sterns soll homogen sein.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Druck $p(r) = p(\rho(r))$ eine Funktion der Dichte und hat keine explizite Ortsabhängigkeit.