# Theorie der Wärme
# Serie 3

HS 09
Prof. G. Blatter

## Aufgabe 3.1 Carnot-Prozess

*In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Carnot-Prozess, insbesondere mit der vom System pro Zyklus geleisteten Arbeit und dem daraus resultierenden Wirkungsgrad.*

1. Eine Carnot-Maschine habe das ideale Gas als Arbeitssubstanz und operiere zwischen zwei Wärmereservoirs mit Gastemperaturen $T_1$ bzw. $T_2$ ($< T_1$). Skizziere den Prozess im $p$-$V$ Diagramm und berechne für jeden Abschnitt die *vom* System geleistete Arbeit $\delta W$ und die *aufgenommene* Wärme $\delta Q$. Benutze dazu:

   (a) $pv = RT$ für isotherme Zustandsänderungen ($v = V/n$) und

   (b) $pv^\gamma = \text{const}$ (mit $\gamma = c_p/c_v > 1$) für adiabatische.

   Zeige, dass für den Wirkungsgrad gilt: $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - T_2/T_1$

2. Zeichne für ein ideales Gas und für eine paramagnetische Substanz ($\delta W = -HdM$, vgl. Aufgabe 2.2) je einen Carnot-Prozess im $T$-$V$ bzw. $T$-$M$ Diagramm. Verwende dazu die folgenden Adiabatengleichungen

$$\begin{array}{rcll} T_i v_i^{\gamma-1} & = & T_j v_j^{\gamma-1} & \text{(ideales Gas)} \\ kC_M \log \frac{T}{T_0} & = & \frac{1}{2}(M^2 - M_0^2) & \text{(paramagn. Subst.)} \end{array}$$

   In welcher Umlaufsrichtung wird von den beiden Maschinen Arbeit geleistet?

   *Tipp*: Die Antwort für das ideale Gas ist aus der Lösung von 3.1.1 ersichtlich. Was ändert sich für eine paramagnetische Substanz?

## Aufgabe 3.2 Anomalie des Wassers

Wasser hat die grösste Dichte bei 4°C, für den Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$ gilt:

$$\alpha \gtreqless 0 \quad \text{für} \quad T \gtreqless 4°\text{C}$$

1. Leite daraus ab, welche Form die Adiabaten im $T$-$V$ Diagramm haben müssen.

   *Tipp:* Betrachte dazu die Steigung der Adiabaten

$$\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_{\text{S}} = -\left.\frac{\partial T}{\partial S}\right|_{\text{V}} \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{\text{T}}$$

   und benutze zum Umformen die Maxwell-Relation

$$\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_{\text{T}} = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{\text{p}} .$$

   Argumentiere dann mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen (Skript 4.48)

$$\begin{array}{rcrcl} \kappa_T & = & -V^{-1}\ \partial V/\partial p|_{\text{T}} & > & 0 \\ c_V & = & T\ \partial S/\partial T|_{\text{V}} & > & 0 \end{array}$$

   wie die Steigung (bzw. deren Vorzeichen) aussehen muss. Skizziere nun die Form der Adiabaten im $T$-$V$ Diagramm für Temperaturen über, bei und unter 4°C.

2. Weshalb ist es nicht möglich, einen Carnot-Prozess zwischen Isothermen bei 2°C und 6°C zu konstruieren? Argumentiere in Worten.

### Aufgabe 3.3 Adiabatische Entmagnetisierung

Die adiabatische Zustandsänderung kann ausgenützt werden um sehr tiefe Temperaturen zu erreichen: Mit dem "magnetokalorischen Effekt" können durch adiabatische Entmagnetisierung eines paramagnetischen Stoffes Temperaturen von $\sim 10^{-3}$K erzeugt werden. *Neben der adiabatischen Zustandsänderung paramagnetischer Stoffe bringt diese Aufgabe auch die Verwendung des "Gibbs Potentials" (auch "Freie Enthalpie", Skript 5.4) näher.*

1. Leite das Gibbs Potential $G(T,H)$ durch zweifache Legendretransformation aus der inneren Energie $U(S,M)$ her und berechne dessen Differential $dG$ (für paramagnetische Stoffe, $\delta W = -HdM$).

2. Zeige, wie sich die Temperatur als Funktion von $H$ längs einer Adiabaten ändert.

   - Wie in 2.2 erfülle die Magnetisierung $M(T,H)$ das Curie Gesetz $M = aH/T$.
   - für die spezifische Wärme $c_H(T,H)$ bei festem Magnetfeld gelte

     $$c_H(T,H) = T \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{\mathrm{H}} \overset{H=0}{=} b/T^2,$$

     wobei $a, b > 0$ Konstanten sind.

   *Tipp*: $G$ aus Teilaufgabe 3.3.1 ist ein thermodynamisches Potential.

   - Aus der Gleichheit $\partial_T \partial_H G = \partial_H \partial_T G$ lässt sich ein Zusammenhang zwischen (partiellen Ableitungen von) $S$ und $M$ herleiten.
   - Benutze dann die obenstehenden Bedingungen an $M$ und $c_H$ um die Entropie $S(T,H)$ zu bestimmen.

3. Wie muss $H$ verändert werden, um tiefere Temperaturen $T$ zu erreichen?