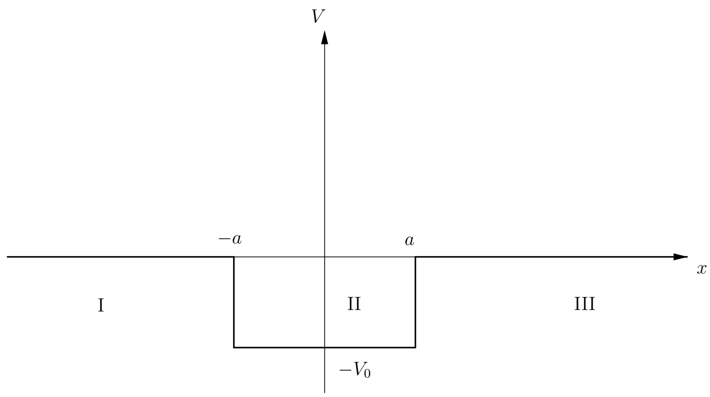
Quantenmechanik I
Serie 6

Exercise 6.1 Gebundene Zustände im Potentialkasten

Gegeben sei der kastenförmige Potentialverlauf

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{für} - a \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Wir suchen $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, welche die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{1}$$

für $x \neq \pm a$ und $E < 0$ lösen.

1. Argumentiere, weshalb sowohl $\psi(x)$ als auch $\frac{d}{dx}\psi(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

2. Zeige unter Verwendung der Stetigkeitsbedingungen aus der ersten Teilaufgabe, dass das Eigenwertproblem (1) mindestens eine Lösung hat, d.h. es gibt ein $E < 0$ mit zugehörigem Eigenvektor $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercise 6.2 Gebundene Zustände im δ-Potential

Gegeben sei das Deltapotential

$$V(x) = -g\delta(x),$$

wobei $g > 0$ und $\delta(x)$ die Delta-"Funktion" darstelle. Wir suchen nach $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, welche die zeitunabhängige Schrödingergleichung (cf. (1)) für $x \neq 0$ und $E < 0$ lösen.

1. Argumentiere, dass $\psi(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, die Ableitung $\frac{d}{dx}\psi(x)$ jedoch bei $x = 0$ einen Sprung macht. Wie gross ist dieser Sprung?

2. Zeige unter Verwendung der Stetigkeitsbedingungen aus der ersten Teilaufgabe, dass es für eine bestimmte Energie $E < 0$ ein $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ gibt, welches das Eigenwertproblem (1) löst. Wie sieht es aus?

Bemerkung zu Aufgabe 2: Allgemein kann man zeigen, dass ein Teilchen in 4 und mehr Dimensionen ein δ-Potential nicht "sieht".
Moral der Aufgaben 1 und 2: Man kann beweisen, dass ein beliebig schwaches Potential in einer und zwei Dimensionen immer einen gebundenen Zustand zu erzeugen vermag.

Exercise 6.3 Instabilität eines Teilchens im Zentralpotential

Wir betrachten ein Teilchen in $\mathbb{R}^3$, welches sich im Potential

$$V(r) = -\frac{g}{r^s} \qquad (s \geq 2)$$

($r = |x|$, $g > 0$) bewegt. In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen der dadurch definierte Hamiltonoperator $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ nach unten unbeschränkt ist.

1. Zeige, dass sich das Spektrum eines beliebigen Hamiltonoperators A unter unitären Transformationen U nicht ändert: $\sigma(A) = \sigma(UAU^*)$

2. Beweise, dass $U_\theta : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$, $(U_\theta \psi)(x) := \theta^{-\frac{3}{2}} \psi(\theta^{-1}x)$, für $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ eine unitäre Transformation definiert und berechne U_θ^*.

3. Zeige, dass
$$(U_\theta H U_\theta^* \psi)(x) = \theta^2 \{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x) - g\frac{\theta^{s-2}}{r^s}\psi(x)\}.$$

4. Sei nun $s = 2$. Man kann zeigen, dass es ein g_{krit} gibt, sodass für $g \leq g_{\text{krit}}$ unser H nach unten beschränkt ist. Zeige, dass die untere Schranke gerade gleich 0 ist.

5. Sei nun $s > 2$. Wir definieren $\psi_\xi(x) := \frac{1}{\xi^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{x^2}{2\xi^2}}$. Berechne $\langle \psi_\xi, H\psi_\xi \rangle$ und zeige, dass H nach unten unbeschränkt ist.