Quantenmechanik I
Serie 2

Exercise 2.1 Algebraische Bestimmung von Eigenwerten hermitescher Matrizen

In dieser Aufgabe besprechen wir eine allgemeine, algebraische Methode zur Bestimmung von Eigenwerten hermitescher Matrizen deren Eigenwerte nach unten beschränkt sind. Wir wenden die Methode sodann auf das Beispiel des harmonischen Oszillators an.
Um die Eigenwerte der Matrix A zu berechnen, defnieren wir eine rekursive Folge von Matrizen A_j wie folgt

$$A_{j+1} = \theta_j \theta_j^* + a^{(j)},$$

wobei die Matrizen θ_j und die reelen Zahlen $a^{(j)}$ durch

$$A_j = \theta_j^* \theta_j + a^{(j)}, \text{ mit } A_1 = A$$

definiert sind. Die Zerlegungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig; wir wählen daher immer die Zerlegung mit größtem Wert $a^{(j)}$. Aus der Konstruktion wird klar dass $a^{(j+1)} \geq a^{(j)}$. Wie wir sehen werden, sind die $a^{(j)}$ gerade die Eigenwerte von A.

(a) Sei ψ Eigenvektor von A zum Eigenwert a. Wir definieren

$$\phi^{(n)} := \theta_n \theta_{n-1} \dots \theta_2 \theta_1 \psi.$$

Berechne $\phi^{(1)*}\phi^{(1)}$ und folgere daraus, dass A keinen Eigenwert hat der kleiner als $a^{(1)}$ ist.

(b) Zeige dass $A_{j+1}\theta_j = \theta_j A_j$ und berechne ganz allgemein einen rekursiven Ausdruck für $\phi^{(n)*}\phi^{(n)}$. Folgere daraus die Ungleichung

$$(a - a^{(n)})(a - a^{(n-1)}) \dots (a - a^{(1)}) \geq 0.$$

Welche Schlussfolgerung können wir somit für alle Eigenwerte von A ziehen?

(c) Es bleibt zu zeigen, dass alle der gefundenen Werte $a^{(j)}$ tatsächlich Eigenwerte von A sind. Zeige hierfür zunächst, dass alle θ_j einen nicht trivialen Kern haben. Folgere daraus, dass $a^{(j)}$ ein Eigenwert von A_j ist. Nun konstruieren wir den Vektor $\psi^{(j)} = \theta_1^* \theta_1^* \dots \theta_{j-1}^* \xi$, $\xi \in \ker \theta_j$, $\xi \neq 0$. Zeige, dass $\psi^{(j)}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $a^{(j)}$ ist.

(d) Wende den Algorithmus auf den Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators an $\frac{1}{2}(P^2 + Q^2)$. (Tipp: Verwende $\theta_j = (Q + iP)/\sqrt{2}$ für alle j. Zeige dass $\theta^{n*}\theta^n = N(N-1)\dots(N-n+1)$ für $N = \theta^*\theta$)

Exercise 2.2 Elektron im homogenen magnetischen Feld

Wir betrachten ein Elektron in einem homogenen Magnetfeld. Die Bewegung des Elektrons sei auf eine endliche Fläche S eingeschränkt. Wir beschränken uns auf die Bewegung des Elektrons in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld und lassen den Spin des Elektrons außer acht.

(a) Berechne anhand rein klassischer Überlegungen und der Bohrschen Quantisierungsbedingung $L = n\hbar; n = 1, 2, 3, \dots$ Vorhersagen für die Energieniveaus (Landau-Niveaus), E_k, und deren Entartung n_k. Vergleiche die Ergebnisse mit den aus der *modernen* Quantenmechanik gewonnenen Ausdrücken,

$$E_k = \hbar\omega_c \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad n_k = 2\frac{\phi}{\phi_0}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad .$$

Wir versuchen nun einen weniger naiven Ansatz mit Hilfe der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung $\oint PdQ = nh$. Sei $H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{q}))^2$ die Hamiltonfunktion für das Elektron, wobei $\vec{A} = \frac{1}{2}(-yB, xB, 0)$ das Vektorpotential des magnetischen Feldes ist.

(b) Führe die generalisierten Impulse $\pi_{x/y} := p_{x/y} - \frac{e}{c}A_{x/y}(\vec{q})$ ein und berechne die Poissonklammer $\{\pi_x, \pi_y\}$. Schreibe H als Funktion der Variablen π_x, π_y.

Idealerweise würden wir das Problem gerne auf einen harmonischen Oszillator reduzieren und dann die Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung anwenden. Wir suchen also geeignete kanonische Transformationen der Variablen π_x und π_y.

(c) Reskaliere o.B.d.A. π_y so, dass die Possionklammer $\{\pi_x, \hat{\pi}_y\} = 1$ ergibt. Wir können nun π_x als Impuls- und $\hat{\pi}_y$ als Ortsvariable im Sinne der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung auffassen. Wende die Quantisierungsbedingung an um die erlaubten Energieniveaus zu bestimmen. Vergleiche wieder mit der in Aufgabenteil (a) angegebenen Lösung.

Exercise 2.3 Vertauschungsrelationen zwischen Koordinaten und Impulsen

Nach Planck und Einstein unterscheiden sich die Energien E_i und E_f von Anfangszustand ψ_i und Endzustand ψ_f eines Atoms bei Emission eines Photons der Frequenz ω gerade um $E_i - E_f = \hbar\omega$.

(a) Bestimme für eine beliebige Observable A, ausgehend vom Kommutator $[A, H]$, einen Ausdruck für das Matrixelement $(\psi_f, A\psi_i) =: A_{fi}$.

Heisenberg postulierte nun, dass sich dieses Matrixelement harmonisch in der Zeit mit der Frequenz der emmitierten Strahlung ändert,

$$i\frac{d}{dt}A_{fi} = \omega A_{fi}. \tag{1}$$

(b) Zeige, dass aus Gleichung (1) und Teilaufgabe (a) und der Annahme dass ψ_i und ψ_f zeitlich konstant sind, die bekannte Vertauschungsrelation

$$[A, H] = i\hbar\frac{dA}{dt} \tag{2}$$

folgt.

Betrachte nun ein Teilchen, dass sich in einem ortsabhängigen Potential $V(q)$ bewegt.

(c) Gebe den Hamilton-Operator des Systems an und bestimme mit Hilfe der Vertauschungsregel (2) den Kommutator von Orts- und Impulsoperator.