Aufgabe 11.1 Versteckte Variablen

In dieser Aufgabe betrachten wir zwei verschiedene Modelle mit lokalen versteckten Variablen und vergleichen ihre Vorhersagen mit denen der Quantenmechanik. Aus einer Quelle fliegen zwei Teilchen mit Spin 1/2 in entgegengesetzte Richtungen entlang der y-Achse auseinander. An den weit voneinander entfernten Orten A und B wird der Spin der Teilchen bezogen auf die Quantisierungsachsen $\mathbf{n}_\alpha = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ und $\mathbf{n}_\beta = (\sin\beta, 0, \cos\beta)$ gemessen.
Quantenmechanik: Das Teilchenpaar wird durch den Singulettzustand

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B)$$

beschrieben.

(a) Berechne den Korrelationskoeffizienten der Messergebnisse, der definiert ist durch

$$E(\alpha,\beta) := \frac{\langle\psi_s|\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{S}\otimes\mathbf{n}_\beta\cdot\mathbf{S}|\psi_s\rangle - \langle\psi_s|\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{S}|\psi_s\rangle\langle\psi_s|\mathbf{n}_\beta\cdot\mathbf{S}|\psi_s\rangle}{(\langle\psi_s|(\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{S})^2|\psi_s\rangle\langle\psi_s|(\mathbf{n}_\beta\cdot\mathbf{S})^2|\psi_s\rangle)^{1/2}}.$$

Versteckte Variablen I: Nun nehmen wir an, dass der Zustand der Teilchen direkt nach dem Austritt aus der Quelle durch den folgenden Produktzustand gegeben ist:

$$|\varphi\rangle = |\uparrow,\varphi\rangle_A \otimes |\downarrow,-\varphi\rangle_B.$$

Hier ist $|\uparrow,\varphi\rangle = V(\varphi)|\uparrow\rangle$, also der um φ um die y-Achse gedrehte Zustand. $V(\varphi)$ ist der Drehoperator im Spinraum wie in Serie 8. Dabei ist φ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Der Erwartungswert eines Operators ergibt sich hier durch Mittelung über den verborgenen Parameter φ.

(b) Berechne $E(\alpha,\beta)$ für diesen Fall.

Versteckte Variablen II: Ein mögliches Experiment besteht nun darin, sich bei der Messung auf α und β entweder 0 oder $\pi/2$ zu beschränken. Unsere zweite Theorie versteckter Variablen besagt nun Folgendes: Jedes Teilchen trägt ein Paar von Parametern (z, x) im Gepäck. Diese sind Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen a und b mit gleichverteilten Werten aus der Menge $\{+\hbar/2, -\hbar/2\}$. Der erste dieser Parameter ist das Messergebnis bei Messung entlang der z-Achse (Winkel 0), der zweite für die Messung entlang der x-Achse (Winkel $\pi/2$).

(c) Berechne $E(\alpha,\beta)$ für die vier möglichen Kombinationen für den Fall, dass die Parameter von Teilchen 1 gegeben sind durch $(z = a, x = b)$ und die von Teilchen 2 durch $(z = -a, x = -b)$. *Tipp: Der Erwartungswert einer Observable A ist jetzt $\langle A\rangle = \sum_{a\in M} aP(a)$ wobei M die Menge der Messergebnisse ist und $P(a)$ die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses a.*

(d) Vergleiche beide Theorien versteckter Variablen mit der quantenmechanischen Vorhersage.

Aufgabe 11.2 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wie in der Vorlesung besprochen ist die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit Ladung e und Masse m im elektromagnetischen Feld, das durch das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das elektrische Potential Φ beschrieben wird, gegeben durch

$$H(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)^2 + e\Phi(\mathbf{x},t).$$

Jetzt sollen daraus die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$$

hergeleitet werden. Dabei ist $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - 1/c\dot{\mathbf{A}}$ das elektrische Feld und $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ das magnetische Feld.

(a) Bestimme $\dot{\mathbf{x}}$ und $\dot{\mathbf{p}}$ aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

(b) Benutze die eben gewonnenen Gleichungen, um die Newtonschen Bewegungsgleichungen zu erhalten. *Achtung: Kanonischer Impuls* $\mathbf{p}$ *und kinetischer Impuls* $m\dot{\mathbf{x}}$ *sind verschieden!*

Die klassischen Bewegungsgleichungen hängen nur von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$, nicht aber direkt von den Potentialen ab. Die Eichtransformationen

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \tag{1}$$

mit der skalaren Funktion $\chi(\mathbf{x}, t)$ lassen die klassischen Bewegungsgleichungen invariant. Die Frage ist nun welchen Einfluss eine Eichtransformation auf die Wellenfunktion ψ in der Schrödingergleichung hat. Diese ist bekanntlich in der Ortsdarstellung gegeben durch

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\right)^2 + e\Phi(\mathbf{x}, t)\right]\psi(\mathbf{x}, t).$$

(c) Zeige, dass die Wellenfunktion nach einer Eichtransformation durch

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi(\mathbf{x}, t)\right)\psi(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 11.3 Para- und Diamagnetismus von Atomen

Betrachte ein Atom in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$. Das Vektorpotential lässt sich dann schreiben als $\mathbf{A} = -1/2(\mathbf{x} \wedge \mathbf{B})$ und man erhält die Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{i\hbar e}{mc}\mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 + e\Phi\right]\psi.$$

(a) Bestimme die beiden vom Vektorpotential abhängigen Beiträge zur Schrödingergleichung und drücke sie durch den Drehimpuls $\mathbf{L}$ und das Magnetfeld $\mathbf{B}$ aus. Welcher der Terme trägt zum Paramagnetismus bei, welcher ist für den Diamagnetismus verantwortlich?

(b) Zeige, dass für nicht zu grosse Magnetfelder der diamagnetische Anteil für Atome viel kleiner ist als der paramagnetische. Schätze beide Terme unter Verwendung von typischen Grössen der dabei auftretenden Erwartungswerte ab. Bei welchen Magnetfeldern sind beide Terme von der gleichen Grössenordnung?

(c) Vergleiche auf gleiche Weise den paramagnetischen Term mit der Coulomb-Energie.