Quantenmechanik I
Serie 10

Aufgabe 10.1 Stern-Gerlach (1922)

Ein Strahl aus ungeladenen Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ läuft entlang der x-Achse und durchquert ein in z-Richtung stark inhomogenes Magnetfeld. Das Magnetfeld koppelt an den Spin entsprechend dem magnetischen Moment der Teilchen und spaltet den Strahl auf.

a) Wählen Sie eine geeignete Quantisierungsachse und nehmen Sie an, dass der Strahl bezüglich dieser Achse wie folgt polarisiert ist: $|\psi\rangle = \cos(\phi)|\uparrow\rangle + \sin\phi|\downarrow\rangle$. Geben Sie, abhängig vom Winkel ϕ, die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Was passiert wenn die einzelnen auslaufenden Strahlen erneut durch einen baugleichen Magneten geleitet werden?

b) Die auslaufenden Strahlen aus Aufgabenteil (a) werden separat durch einen weiteren Magneten geleitet, dessen Magnetfeld jedoch in x-Richtung orientiert ist. Geben sie die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Welche Rolle spielt dabei der Winkel aus Aufgabenteil (a)?

c) Nachdem die Teilchen sowohl den Magneten mit Feld in z-Richtung, als auch den Magneten mit Feld in x-Richtung passiert haben, wird jeder der auslaufenden Strahlen wieder durch einen Magneten mit Feld in z-Richtung geleitet. In wieviel Strahlen spaltet jeder der Strahlen auf? Bestimmen Sie die relative Teilchenzahl zu allen auslaufenden Strahlen.

d) Wie sähe das Experiment in (a)-(c) aus wenn die Drehimpulsoperatoren kommutieren würden?

Aufgabe 10.2 Quanten-Telepathie

$N > 4$ Spieler befinden sich gemeinsam in einem Raum. Zwei der Spieler werden zufällig ausgewählt und müssen sich in zwei voneinander vollkommen isolierte Kammern begeben. Die ausgewählten Spieler wissen nicht wer in der jeweils anderen Kammer sitzt. Sie werden aufgefordert ein Bit auszugeben. Das Spiel gilt als gewonnen, wenn die beiden ausgegebenen Bits unterschiedlich sind. Die einzige Information die den Spielern in den Kammern zur Verfügung steht ist ein Kontroll-Bit, welches ihnen von den N-2 verbleibenden Spielern gesendet wird. Beide Spieler, o.B.d.A S_1 und S_2, bekommen das gleiche Bit. Bis zur Auswahl der zwei Spieler dürfen sich alle N Spieler auf die bestmögliche Strategie einigen.

a) Zeigen Sie, dass klassisch die mittlere Gewinnwahrscheinlichkeit für große N nach oben durch $p = \frac{3}{4}$ beschränkt ist.

   Tipp: Bestimmen Sie alle möglichen Strategien wie ein Spieler auf ein Kontroll-Bit antworten kann. Nehmen Sie an, dass sich alle N Spieler unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für eine der Strategien entscheiden, und berechnen Sie dann den Erwartungswert der Gewinnwahrscheinlichkeit. Gehen Sie auch davon aus, dass die aussenstehenden Spieler wissen welche Strategien S_1 und S_2 verfolgen.

Nun wollen wir sehen wie sich die Gewinnwahrscheinlichkeit ändert, wenn jeder der Spieler einen Quantensystem zur Hand hat. Nehmen Sie an, die Spieler haben sich vor Beginn des Spiels so abgesprochen, dass sich ihre Systeme im gemeinsamen Zustand

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle^{\otimes N} + |1\rangle^{\otimes N}\right)$$

befinden. Nehmen Sie des weiteren an, dass nach Auswahl von S_1 und S_2 die verbleibenden $N-2$ Spieler jeweils ihr System in der diagonalen Basis

$$|\bar{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \quad |\bar{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right)$$

messen und das Ergebnis untereinander bekanntgeben.

b) In welchen Zuständen können sich die Spieler in den Kammern nach der Messung der anderen Spieler befinden?

c) Geben Sie an, auf welche Strategie sich die Spieler vor dem Spiel einigen müssen, um das Spiel nun mit Sicherheit zu gewinnen.

Tipp: In welcher Basis, abhängig vom Kontroll-Bit, müssen S_1 und S_2 messen um sicher zu gehen, dass sie unterschiedliche Messergebnisse erhalten. Betrachten Sie z.B. eine Messung in der zirkulären Basis.

d) Welche Schlüsse ziehen Sie daraus hinsichtlich der Simulierbarkeit von Quantensystemen?

Aufgabe 10.3 Clebsch-Gordan-Reihe

In dieser Aufgabe wollen wir die Clebsch-Gordan-Reihe (2) herleiten. Dazu führen wir zunächst die benötigte Maschinerie ein. Sei D^j eine Darstellung von $SU(2)$ zum Drehimpuls j. Der Charakter χ_j einer Darstellung D^j ist definiert durch

$$\chi_j(U) := \mathrm{Tr}\left[D^j(U)\right].$$

Wir führen eine Äquivalenzrelation auf $SU(2)$ ein, wobei zwei Elemente U, U' genau dann äquivalent sind wenn sie zueinander konjugiert sind, d.h.: $U \sim U' \Leftrightarrow \exists V : U' = VUV^{-1}$.
Wir betrachten die Funktionen

$$\psi^j_m(\xi) = C(j,m) \cdot \xi_+^{j+m}\xi_-^{j-m},$$

$\xi = (\xi_+, \xi_-)^T; \xi_+, \xi_- \in \mathbb{C}$; $\xi = (\xi_+, \xi_-)^T; \xi_+, \xi_- \in \mathbb{C}, C(j,m) \in \mathbb{R}; j = 0, \ldots, N; m = -j, \ldots, j$.

Jedes $U \in SU(2)$ induziert in dem von den ψ aufgespannten Räumen eine lineare Transformation

$$\left(D^j(U)\psi\right)(\xi) := \psi(U^T\xi).$$

Die Zuordnung $U \rightarrow D^j(U)$ ist eine Darstellung von $SU(2)$. Unser Ziel ist die Zerlegung der Tensorproduktdarstellung $D^{j_1} \otimes D^{j_2}$ in irreduzible Bestandteile

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = \bigoplus_j m_j D^j. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass der Charakter eine Konstante auf den Äquivalenzklassen ist. Zeigen Sie ebenfalls, dass wir für jede Äquivalenzklasse eine Diagonalmatrix als Repräsentat wählen können und die Klassen somit durch einen Winkel indiziert werden können.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a), dass $D^j(U(\alpha))\psi^j_m = e^{2im\alpha}\psi^j_m$ und somit $\chi_j([\alpha]) = \sum_{m=-j}^{+j} e^{2im\alpha}$, wobei $[\alpha]$ die durch den Winkel α indizierte Äquivalenzklasse ist.

Tipp: Verwenden Sie, dass die Matrixelemente von $D^j(U)$ bezüglich der Basis ψ^j_m definiert sind durch $\left(D^j(U)\psi^j_m\right)(\xi) := \psi^j_m(U^T\xi)$.

c) Beweisen Sie, ausgehend von (1), die Clebsch-Gordan-Reihe

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j=j_1+j_2} D^j. \tag{2}$$

Tipp: Verwenden Sie, dass der Charakter der Tensorproduktdarstellung $D^{j_1} \otimes D^{j_2}$ gleich dem Produkt der Charaktere χ_{j_1} und χ_{j_2} ist. Verwenden Sie Aufgabenteil (b) um zu zeigen, dass die Multiplizitäten alle eins sind.