Quantenmechanik I
Serie 9

Herbst 2008
Prof. R. Renner

Aufgabe 9.1 Drehimpuls-Addition

Betrachte den Spin eines Systems aus einem Teilchen mit Spin $s_1 = 1$ und einem Teilchen mit Spin $s_2 = \frac{1}{2}$. Der Spinoperator des Systems sei $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{S}}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \hat{\vec{S}}^{(2)}$. Wir schreiben kurz $\hat{\vec{S}}^{(1)}$ statt $\hat{\vec{S}}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$ und $\hat{\vec{S}}^{(2)}$ statt $\mathbb{1} \otimes \hat{\vec{S}}^{(2)}$. Für Darstellungen der Drehimpulsalgebra $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \epsilon_{ijk}\hat{S}_k$ benutze (in Einheiten $\hbar = 1$)

$$\hat{\vec{S}}^2|s,m\rangle = s(s+1)|s,m\rangle\,, \quad \hat{S}_3|s,m\rangle = m|s,m\rangle\,, \quad \hat{S}_\pm|s,m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s,m\pm 1\rangle$$

für $\hat{S}_\pm = \hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2$.

a) Zeige, daß $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$. Das Tensorprodukt der Darstellungen s_1 und s_2 ist also wieder eine Darstellung der Drehimpuls-Algebra.

b) Im zusammengesetzten System haben wir eine Eigenbasis $\{|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle\}$ zu $(\hat{\vec{S}}^{(i)})^2$, $\hat{S}_3^{(i)}$, und eine Eigenbasis $|j, m\rangle$ zu $\hat{\vec{J}}^2$, $\hat{J}_3$. Schreibe die $|j,m\rangle$ als Linearkombination der $|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$.

   Vorgehen: Bestimme den Zustand $|j, m^+\rangle$ mit der höchsten magnetischen Quantenzahl $m = m^+$. Wende $\hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$ wiederholt auf diesen Zustand an, um die anderen Eigenzustände mit demselben Spin j zu finden. Wenn eine Potenz von J_- schließlich den Zustand vernichtet, suche erneut den Zustand mit der höchsten magnetischen Quantenzahl im Komplement der bis dahin erzeugten Zustände, und verwende J_- erneut.

Aufgabe 9.2 Quaternionen

Der Menge der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist die Erweiterung der Menge der reellen Zahlen um die Elemente i, j und k, ähnlich wie die komplexen Zahlen eine Erweiterung um das Element i sind. Dabei hat jede Quaternion x die Darstellung

$$x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$$

mit reellen Zahlen x_0, x_1, x_2, x_3. Analog zu den komplexen Zahlen definiert man eine assoziative und distributive Multiplikation, die jedoch *nicht* kommutativ ist; es gelten die Rechenregeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,.$$

Ebenfalls in Analogie zu den komplexen Zahlen ist zu jeder Quaternion x die konjugierte Quaternion $\bar{x}$ durch $\bar{x} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$ und der Betrag durch $|x| = \sqrt{x\bar{x}}$ definiert.

a) Zeige, daß $ij = k$ und $ji = -k$ ist, und daß dies auch für zyklische Vertauschungen von i, j, k gilt.

Die Quaternionen wurden Mitte des 19. Jh. von Hamilton zur Darstellung der Drehungen in drei Dimensionen eingeführt. Im folgenden beschränken wir uns auf die Einheitsquaternionen $|x| = 1$.

b) Zeige, daß eine Realisierung der Elemente i, j und k durch $e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_l}$ gegeben ist, wobei σ_l für $l = x, y, z$ die Paulimatrizen sind. Folgere, daß die Einheitsquaternionen eine Gruppe isomorph zu $SU(2)$ bilden.

c) Jede Einheitsquaternion x lässt sich als

$$x = \cos\alpha + \mathbf{v}\sin\alpha \tag{1}$$

schreiben, wobei α ein reeller Winkel zwischen 0 und π und $\mathbf{v} = iv_1 + jv_2 + kv_3$ eine "reine" Quaternion mit $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ ist. Wir fassen die Tripel der Koeffizienten in reinen Quaternionen als Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ auf.

i) Verifiziere, daß das Produkt zweier reiner Quaternionen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ durch

$$\mathbf{vw} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

gegeben ist, wobei $\times$ bzw. $\cdot$ das Vektor- bzw. das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen. Bemerke, daß für eine reine Quaternion $\mathbf{v}$ und einen Skalar $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_0\mathbf{v} = \mathbf{v}x_0$.

ii) Es sei x wie in (1), und $\mathbf{w}$ eine reine Quaternion. Zeige, daß

$$\mathbf{w}' = x\mathbf{w}\bar{x}$$

gerade dem um den Winkel 2α um die Achse $\mathbf{v}$ gedrehten Vektor $\mathbf{w}$ entspricht. Wie kann man sehen, daß $SU(2)$ die doppelte Überlagerung der $SO(3)$ ist?
Hinweis: Benutze Aufgabe 3 c) der Serie 8, und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Aufgabe 9.3 Quanten-Teleportation

"Bond! Ich mag Sie nicht." – "Ich weiß, M." – "Aber wir brauchen Sie. Die Bombe steht in der Antarktis. Sie brechen sofort auf. Ein Flugzeug wirft Sie unweit der Zielkoordinaten ab." – "Wie entschärfe ich das Ding?" – "Die Steuervorrichtung muß mit einem Elektron in einem bestimmten Spin-Quantenzustand gefüttert werden. Q arbeitet daran, ein Elektron in diesem Zustand herzustellen." – "Er *arbeitet* daran?" – "Sie kriegen ein Elektron eines Singuletts. Das andere bleibt bei uns. Sagt Ihnen 'Quantenteleportation' etwas?" – "Ich bin damit vertraut." – "Q schickt Ihnen das Meßergebnis von der Zusammensetzung seines Teilchens mit dem benötigten Zustand, sobald er ihn erzeugt hat. Sie müssen dann Ihren Spin nur noch richtig drehen. Viel Glück. Oh, und Bond –" – "Ja?" – "Machen Sie nicht wieder *alles* kaputt!"

— — —

"In diesem Injektor ist Ihr Elektron. Es ist Teil eines Singulett-Zustands. Sein Partner-Elektron habe ich hier. Wir arbeiten daran, ein weiteres Elektron in genau dem Zustand zu erzeugen, den Sie schließlich benötigen werden." – "Danke, Q." – "Wenn ich den Zustand erzeugt habe, setze ich meine zwei Elektronen zusammen und messe sie so, daß eines der Ergebnisse der Basis

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)\,, \quad |\chi_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)\,, \\ |\chi_3\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)\,, \quad |\chi_4\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \tag{2}$$

herauskommt; der erste Spinwert ist der meines neu erzeugten Elektrons. Des weiteren habe ich hier diese Uhr für sie. Sie hat einen eingebauten Spin-Dreher, der dreht Ihnen den Spin Ihres Elektrons auf drei verschiedene Weisen:

1) $|\uparrow\rangle \mapsto |\uparrow\rangle\,,\ |\downarrow\rangle \mapsto -|\downarrow\rangle\,,$ 2) $|\uparrow\rangle \mapsto |\downarrow\rangle\,,\ |\downarrow\rangle \mapsto |\uparrow\rangle\,,$ 3) $|\uparrow\rangle \mapsto |\downarrow\rangle\,,\ |\downarrow\rangle \mapsto -|\uparrow\rangle\,.$

Wenn Sie am Einsatzort sind, melde ich mich und teile Ihnen mein Meßergebnis – χ_1, χ_2, χ_3 oder χ_4 – mit. Sie müssen dann Ihren Zustand so drehen, daß er gerade dem speziellen Zustand entspricht, den wir erzeugt hatten. Bond?" – "Ja?" – "Wir haben nur einen Versuch…"

a) Was ist die (Gesamt-)Drehimpuls-Quantenzahl l der vier Zustände (2)?

b) Der spezielle Zustand, den Bonds Elektron einnehmen muß, sei $|\phi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. Wie lautet der Gesamtzustand aller drei Elektronen, wenn Q seine beiden Elektronen zusammensetzt?

c) Welche Drehung muß Bond in Abhängigkeit von dem Meßergebnis, das Q Bond mitteilt, anwenden, um sein Elektron nach Qs Messung in den speziellen Zustand $|\phi\rangle$ zu bringen?

d) Warum wird hier keine Information mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen?