Aufgabe 7.1 Drehimpuls-Kommutatoralgebra

Es sei $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ der Drehimpulsoperator.

a) Zeige, dass $\vec{L}$ hermitsch ist und dass $[r^2, \vec{L}] = [p^2, \vec{L}] = 0$. Schliesse daraus, dass $\vec{L}$ mit dem Hamiltonian $H = p^2/2m + V(\vec{r})$ kommutiert, wobei $V(\vec{r})$ ein Zentralpotential ist.

b) Berechne $[L_1, L_2]$, $[L_1, L_3]$, $[L_2, L_3]$ und $[L^2, L_3]$. Begründe, wieso die stationären Lösungen der Schrödingergleichung des Zentralpotentialproblems als Eigenfunktionen von L^2 und L_3 gewählt werden können.

c) Drücke L^2 als Funktion von $\vec{r} \cdot \vec{p}$ und r^2 aus. Zeige damit

$$p^2 = \frac{1}{r^2}\left(L^2 + (\vec{r} \cdot \vec{p})^2 - i\hbar(\vec{r} \cdot \vec{p})\right).$$

Aufgabe 7.2 Mehr Drehimpuls-Kommutatoralgebra

Gegeben ein beliebiges Zentralpotentialproblem. Unter Benützung von Aufgabe 1 nennen wir nun die stationären Lösungen der Schrödingergleichung $|\psi_{nlm}\rangle$. Sie bilden ein vollständiges orthonormales System und wir definieren o.B.d.A. nach Konvention

$$L^2|\psi_{nlm}\rangle = l(l+1)\hbar^2|\psi_{nlm}\rangle \quad \text{und} \quad L_3|\psi_{nlm}\rangle = m\hbar|\psi_{nlm}\rangle.$$

In dieser Aufgabe versuchen wir die Werte von l und m einzuschränken. Dazu führen wir zuerst zwei neue Operatoren ein:

$$L_+ := L_1 + iL_2, \qquad L_- := L_1 - iL_2.$$

a) Berechne die Kommutatoren $[L_+, L_3]$ und $[L_-, L_3]$. Zeige damit, dass die Operatoren L_+ und L_- die Funktion von Auf- bzw. Abstiegsoperatoren für L_3 einnehmen. Tipp: Wende L_3L_+ bzw. L_3L_- auf $|\psi_{nlm}\rangle$ an.

b) Zeige die Identitäten $L_+L_- = L^2 - {L_3}^2 + \hbar L_3$ und $L_-L_+ = L^2 - {L_3}^2 - \hbar L_3$. Benutze dieses Resultat — zusammen mit der Tatsache, dass die Normen $\|L_+|\psi_{nlm}\rangle\|$ und $\|L_-|\psi_{nlm}\rangle\|$ nicht negativ sind — um die Ungleichungen $-l \leq m \leq l$ zu finden.

c) Die Werte von m sind also beschränkt und somit muss bei wiederholten anwenden von L_+ oder L_- die Norm aus b) irgendwann verschwinden. Gib an für welche Zustände $|\psi_{nlm}\rangle$ dies geschieht und folgere daraus, dass l entweder halb- oder ganzzahlig sein muss und $m \in \{-l, -l+1, -l+2, \ldots, l\}$.

d) Berechne die Erwartungswerte $\langle L_1\rangle$ und $\langle {L_1}^2\rangle$ für ein System im Zustand $|\psi_{nlm}\rangle$.

Aufgabe 7.3 Schwach gebundene Zustände in einer, zwei und drei Dimensionen

Gegeben sei ein rotationssymmetrisches, attraktives ($V_0 > 0$) Potential in d Dimensionen von der Form

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ 0 & r \geq r_0 \end{cases}.$$

a) Zeige, dass für $d = 1$ und $d = 2$ immer ein gebundener Zustand ($E < 0$) existiert. Zeige weiter, dass für ein schwaches Potential mit $\xi_0 = \sqrt{2mV_0}r_0/\hbar \ll 1$ die Energie des Grundzustandes durch

$$E = \begin{cases} -V_0{\xi_0}^2 & d = 1 \\ -\frac{V_0}{{\xi_0}^2}e^{-4/{\xi_0}^2} & d = 2 \end{cases}$$

gegeben ist.

b) Zeige, dass es in 3 Dimensionen für $\xi_0 < \pi/2$ überhaupt keinen gebundenen Zustand gibt.

Tipp: Bei $d = 2$ treten die Besselschen Differiantialgleichungen in Erscheinung:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - l^2) y = 0 \quad \text{und} \tag{1}$$

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + l^2) y = 0. \tag{2}$$

Uns interessieren nur die Lösungen für $l = 0$, daher

$$\begin{array}{rcll} J_0(x) & = & 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4) & \quad \text{für (1) und} \\ K_0(x) & = & -\ln(x) + O(1) & \quad \text{für (2).} \end{array}$$