Quantenmechanik I
Serie 6

Herbst 2008
Prof. R. Renner

Aufgabe 6.1 Kohärente Zustände

Für die stationären Zustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators verschwinden die Erwartungswerte von Ort und Impuls. Aus der klassischen Mechanik weiss man, dass Ort und Impuls sich zeitlich periodisch ändern.
Wir wollen nun Quantenzustände suchen, die ein analoges Verhalten zur klassischen Mechanik aufweisen. Man nennt sie kohärente Zustände.

a) Gesucht sind also Zustände, bei denen die Erwartungswerte für Ort und Impuls nicht verschwindet. Diese Bedingung erfüllen z.B. Eigenzustände des Vernichtungsoperators:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{1}$$

Ein solcher Zustand lässt sich nach den stationären Zuständen entwickeln, d.h.

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha)|n\rangle. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $c_n(\alpha)$.

b) Wir definieren nun den Operator

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass es sich um einen unitären Operator handelt und untersuchen Sie seine Wirkung auf den Grundzustand der stationären Zustände $|0\rangle$.

c) Warum gibt es keine Eigenzustände zum Erzeugungsoperator?

Aufgabe 6.2 Supersymmetrie

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet
$H_B = \frac{1}{2}\hbar\omega(a^\dagger a + aa^\dagger)$, wobei die Erzeuger und Vernichter $a^\dagger$,a die Vertauschungsrelationen

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \tag{4}$$

erfüllen. Wir definieren nun ein ähnliches System mit dem Hamiltonoperator

$$H_F = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(b^\dagger b - bb^\dagger\right), \tag{5}$$

wobei

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \qquad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0. \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet $\{\cdot,\cdot\}$ den Antikommutator, allgemein $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

a) Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte von H_F. Gibt es eine Besetzungszahldarstellung und Auf- und Absteigeoperatoren analog zum gewöhnlichen harmonischen Oszillator?

b) Nun betrachten wir die Summe $H = H_B + H_F$, die auf dem Tensorprodukt der Zustandsräume operiert. Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$Q = a^\dagger b, \qquad Q^\dagger = b^\dagger a \tag{7}$$

mit H vertauschen. Was folgt daraus für das Spektrum von H? Welche Zustände sind entartet?

c) Zeigen Sie dass

$$\{Q, Q^\dagger\} = \frac{1}{\hbar\omega} H. \tag{8}$$

Aufgabe 6.3 Wasserstoffatom

Ein Teilchen der Ladung q befinde sich in einem Zentralpotential $V(r)$. Der Operator des elektrischen Dipomoments ist definiert durch

$$\hat{p} = q\ z = q\ r\ \cos\theta. \tag{9}$$

$\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ seien die Eigenzustände des Hamilton-Operators.

a) Zeigen Sie:

$$\int d^3r \Psi^*_{nlm}(\vec{r}) \cdot \hat{p} \cdot \Psi_{nlm}(\vec{r}) = 0. \tag{10}$$

b) Für welche Paare $l', m';\ l, m$ ist das Matrixelement

$$\int d^3r \Psi_{n,l',m'}(\vec{r}) \cdot \hat{p} \cdot \Psi_{nlm}(\vec{r}) \tag{11}$$

von Null verschieden? Welche Bedeutung haben diese Übergänge? Benutzen Sie die Rekursionsformel für die zugeordneten Legendre-Polynome:

$$(2l+1) z P_l^m(z) = (l+1-m) P_{l+1}^m(z) + (l+m) P_{l-1}^m(z) \qquad (0 \leq m \leq l-1) \tag{12}$$

c) Konstruieren Sie mit den bekannten Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms einen Eigenzustand zu $n = 2$, für den der Erwartungswert von $\hat{p}$ nicht verschwindet und berechnen Sie diesen.