ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 4

Herbst 2008
Prof. R. Renner

Aufgabe 4.1 Kommutatoren

Im folgenden betrachten wir einige Identitäten linearer Operatoren A und B auf einem Hilbert Raum, welche

$$\begin{aligned} [A,[A,B]] &= 0\,, \\ [B,[A,B]] &= 0\,, \end{aligned}$$

erfüllen.

a) Zeige, dass

$$\begin{aligned} [A,B^n] &= nB^{n-1}[A,B]\,, \\ [A^n,B] &= nA^{n-1}[A,B]\,. \end{aligned}$$

b) Zeige, dass

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,.$$

Hinweis: Zeige, dass $f(t) = e^{tA}e^{tB}$ die Differentialgleichung $df/dt = (A+B+t[A,B])f$ erfüllt, und löse diese.

Aufgabe 4.2 Weyl'sche Kommutationsrelation

Es seien p und q die Impuls- und Ortsoperatoren, und wir definieren $U(b) = e^{ibq}$, und $V(a) = e^{iap} = e^{a\hbar\partial_q}$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, dass

$$V(a)\psi(q) = \psi(q+\hbar a)\,.$$

für eine Wellenfunktion $\psi(q)$ in der Schrödinger'schen Darstellung.

b) Beweise die Weyl'sche Kommutationsrelation

$$U(b)V(a) = e^{-i\hbar ab}V(a)U(b)\,,$$

in der Schrödinger'schen Darstellung unter Verwendung von Teil a) und allgemein.

c) Zeige, dass die Weyl'sche Kommutationsrelation formal äquivalent ist zur Heisenberg'schen Kommutationsrelation $[q,p] = i\hbar$. Unter "formal" äquivalent verstehen wir, dass Definitionsbereiche unbeschränkter Operatoren vernachlässigt werden.

Aufgabe 4.3 Tunneleffekt

Wir betrachten eine Potentialbarriere in einer Dimension welche beschrieben ist durch das Potential $V(x) = V_0\Theta(a-|x|)$, wobei $V_0 > 0$. Es falle ein Teilchen der Masse m und Energie $E < V_0$ von $-\infty$ ein, und werde an der Barriere gestreut.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Barriere durchdringt.

b) Gib eine Näherung für die Transmissionwahrscheinlichkeit für den Grenzfall $qa \gg 1$ ($q = \sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}$) an.

Aufgabe 4.4 Streuung an Delta-Potentialen

a) Wir betrachten nun ein Delta Potential in einer Dimension: $V(x) = V_0\delta(x)$. Zeige, dass die erste Ableitung der Wellenfunktion nach x einer Sprungbedingung genügen muss, wenn man Stetigkeit von $\psi(x)$ verlangt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{d}{dx}\psi(\varepsilon) - \frac{d}{dx}\psi(-\varepsilon)\right] = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)\,.$$

b) Betrachte nun zwei Delta Potentiale im Abstand $2a$: $V(x) = V_0\delta(x+a) + V_0\delta(x-a)$. Berechne die Transmissionswahrscheinlichkeit (durch beide Potentiale) eines von $-\infty$ einfallenden Teilchens mit Energie $E > 0$.

c) Was wird wohl unter "resonantem Tunneln" verstanden ?