Übung 1. *Idealer Paramagnet*

Wir betrachten $N \gg 1$ unhabhängige magnetische Momente mit totaler Energie E, welche unter Einfluss eines Magnetisches Feldes H die Werte $m_i = \pm m$ annehmen können. Das System wird durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben

$$\mathcal{H} = E = -\sum_{i=1}^{N} H m_i = -HM = -Hnm, \tag{1}$$

wobei $n = n_+ - n_-$ die Differenz zwischen der Anzahl negativer und positiver Momente ist, und $M = nm$ die totale Magnetisierung des Systems ist.

(a) Zeige, dass die Anzahl Zustände mit einer gewissen Magnetisierung $M = nm$ durch

$$\Omega(M) = \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!} \tag{2}$$

gegeben ist.

(b) Berechne die Entropie $S(E,H) = k_B \log(\Omega(E,H))$. Benutze dafür die Stirling-Formel $\log N! \approx N \log N - N + \frac{1}{2}\log(2\pi N)$ für $N \gg 1$, und vernachlässige Terme der Ordnung $\log N$.

(c) Berechne die Temperatur $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_H$ und löse für $E = E(T,H)$.

(d) Die Magnetisierung ist gegeben durch $M = T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E$. Zeige, dass im Hochtemperaturlimes $k_B T \gg Hm$ die Magnetisierung M das Curie-Gesetz $M = N\frac{Hm^2}{k_B T}$ erfüllt.

Lösung.

(a) Mit $n = n_+ - n_-$ und $N = n_+ + n_-$ gilt $n_\pm = \frac{N \pm n}{2}$. Die Anzahl Zustände ist gleich die Anzahl Kombinationen von Momente, die dieselbe Magnetisierung geben, dass heisst

$$\Omega(M) = \frac{N!}{n_+! n_-!}.$$

(b) Wir benutzen die Stirling-Formel und bekommen

$$\begin{aligned}\log\Omega(M) &= \log(N!) - \log(n_+!) - \log(n_-!)\\ &\approx N(\log N - 1) - \frac{N+n}{2}\left[\log\left(\frac{N+n}{2}\right) - 1\right) - \frac{N-n}{2}\left(\log\left(\frac{N-n}{2}\right) - 1\right) - \frac{1}{2}\log(\pi^2(N^2-n^2)\right].\end{aligned}$$

Der letzte Term kann vernachlässigt werden, da er $\sim \log(N)$ ist. Wir können dann die Entropie schreiben als

$$S = k_B \log\Omega(n) = 2Nk_B\log(2) - \frac{Nk_B}{2}\left[\left(1+\frac{n}{N}\right)\log\left(1+\frac{n}{N}\right) + \left(1-\frac{n}{N}\right)\log\left(1-\frac{n}{N}\right)\right]. \tag{L.1}$$

Durch einsetzen von $n = -\frac{E}{Hm}$ ergibt sich $S(E,H)$.

(c) Wir bekommen direkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_H = \left(\frac{\partial n}{\partial E}\right)_H \frac{\partial S}{\partial n} = -\frac{1}{Hm}\frac{\partial S}{\partial n}\\ &= \frac{Nk_B}{2Hm}\left(\frac{1}{N}\log\left(1+\frac{n}{N}\right) - \frac{1}{N}\log\left(1-\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\right) = \frac{k_B}{2Hm}\log\left(\frac{N+n}{N-n}\right)\\ &= -\frac{k_B}{2Hm}\log\left(\frac{NHm+E}{NHm-E}\right).\end{aligned}$$

Inversion liefert $E = -NHm\tanh\left(\frac{Hm}{k_B T}\right)$.

(d) Betrachte zuerst

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E = \left(\frac{\partial n}{\partial H}\right)_E \frac{\partial S}{\partial n} = -\frac{E}{H^2 m}\frac{\partial S}{\partial n} = \frac{Ek_B}{2H^2 m}\log\left(\frac{NHm+E}{NHm-E}\right).$$

Wir erhalten dann für die Magnetisierung

$$M = T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E = -\frac{E}{H} = Nm\tanh\left(\frac{Hm}{k_B T}\right), \tag{L.2}$$

und im Hochtemperaturlimes bekommen wir $M = N\frac{Hm^2}{k_B T} + \mathcal{O}(T^0)$, wie erwartet.

Übung 2. ***Relaxationszeitnäherung***

Wir betrachten die (kräftefreie) Boltzmann-Gleichung (BG)

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}}_{\equiv \mathcal{D}f} = \underbrace{\int d^3v_2\, d^2\hat{u}\, u\frac{d\sigma}{d\Omega}(f'f_1' - ff_1)}_{\equiv\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_S}$$

und die Maxwell-Boltzmann Verteilung (MBV)

$$f_0(\vec{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}\ , \tag{3}$$

wobei n, $\vec{v}_0$, T die Teilchendichte, bzw. die mittlere Geschwindigkeit und die Temperatur sind. Dies ist aus

$$n = \int d^3v\, f_0(\vec{v})\ , \qquad n\vec{v}_0 = \int d^3v\, \vec{v} f_0(\vec{v})\ , \qquad n\cdot\frac{3}{2}kT = \int d^3v\, m\frac{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}{2} f_0(\vec{v}) \tag{4}$$

ersichtlich. Die MBV $f_0(\vec{v})$ ist eine Lösung der BG, da sowohl $(\partial f_0/\partial t)_S = 0$ wie $\mathcal{D}f_0 = 0$ gelten.

Statt Konstanten n, $\vec{v}_0$, und T betrachten wir nun Felder

$$n = n(\vec{x},t)\ , \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{x},t)\ , \qquad T = T(\vec{x},t)\ . \tag{5}$$

Durch Einsetzen in (3) entsteht eine *lokale Maxwell-Boltzmann Verteilung*, $f_0 = f_0(\vec{x},\vec{v},t)$.

(a) Zeige, dass im allgemeinen $f_0(\vec{x},\vec{v},t)$ keine Lösung der BG ist, da $(\partial f_0/\partial t)_S = 0$ aber $\mathcal{D}f_0 \neq 0$ gelten.
Hinweis: Äquivalent zu (3) und (5) ist $\log f_0 = A + \vec{B}\cdot\vec{v} + C\vec{v}^2$ mit $A = A(\vec{x},t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x},t)$, $C = C(\vec{x},t)$.

Lösung. Auch für lokalen n, $\vec{v}_0$ und T, ist $f_0(\vec{x},\vec{v},t)$ quadratisch in $\vec{v}^2$. Aus der Definition der MBV folgt direkt

$$\log f_0 = A(\vec{x},t) + \vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{v} + C(\vec{x},t)\vec{v}^2.$$

Damit ist $log f_0$ eine Stossinvariante und somit $\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_S = 0$, als in der Vorlesung gezeigt wurde.

Betrachte nun $\mathcal{D}\log f_0$. Es ist ein Polynom 3. Grades in $\vec{v}$, mit höchstem Term

$$\frac{\partial C}{\partial t}\vec{v}^2 + \vec{v}\cdot\frac{\partial C}{\partial \vec{x}}\vec{v}^2.$$

Keine Zeitentwicklung von $C(\vec{x},t)$ kann dies zum verschwinden bringen. Somit ist auch $\mathcal{D}f_0 = f_0\mathcal{D}\log f_0 \neq 0$.

Wir berücksichtigen nun eine Korrektur g,

$$f(\vec{x},\vec{v},t) = f_0(\vec{x},\vec{v},t) + g(\vec{x},\vec{v},t)\ .$$

Dabei soll g die Felder (5) nicht ändern

$$\int \varphi(\vec{v}) g(\vec{x},\vec{v},t)\, d^3v = 0\ , \qquad \text{für} \quad \varphi(\vec{v}) = 1,\ \vec{v},\ \vec{v}^{\,2}. \tag{6}$$

Wir linearisieren den Stossterm um f_0 herum durch den Ansatz (Relaxationszeitnäherung)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_S \approx -\frac{f-f_0}{\tau} = -\frac{g}{\tau}\ , \tag{7}$$

wobei τ die Relaxationszeit ist. Dabei ist g von Ordnung τ.

(b) In erster Ordnung in τ zeige, dass

$$g = -\tau \mathcal{D} f_0\ . \tag{8}$$

Lösung. Dies folgt direkt aus der Annahme, dass g von der Ordnung τ ist. Aus unserem Ansatz

$$\mathcal{D}(f_0 + g) = -\frac{g}{\tau},$$

folgt direkt $g = -\tau\mathcal{D}(f_0)$ wenn wir Termen der Ordnung τ^2 vernachlässigen.

(c) Ziege, dass die Zeitentwicklung der Felder (5) durch die (kräftefreien) Euler-Gleichungen gegeben ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{v}_0) &= 0\ , \\ \rho\left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_0\right) + \vec{\nabla} p &= 0\ , \\ \frac{3}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla})T\right) + T\operatorname{div}\vec{v}_0 &= 0\ , \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $\rho = mn$ und $p = nkT$ die Massendichte und den Druck bezeichnen.
Hinweis: Setze $g = -\tau\mathcal{D}f_0$ in (6) für $\varphi = 1, v_i, \vec{v}^2$ explizit ein.

Lösung. In (6) $g = -\tau\mathcal{D}f_0$ einsetzen ergibt

$$0 = \int \varphi(\vec{v})\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{x}}\right)\mathrm{d}^3v = \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(\vec{v}) f_0 \mathrm{d}^3 v + \operatorname{div}\int \varphi(\vec{v})\vec{v} f_0 \mathrm{d}^3 v,$$

wobei $\operatorname{div}\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$ ist. Für $\varphi = 1$ erhalten wir aus der Definition (4)

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{v}_0).$$

Für $\varphi = v_i$, $i = 1,2,3$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(n v_{0,i}) + \sum_{k=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x_k}\int v_i v_k f_0 \mathrm{d}^3 v. \tag{L.3}$$

Mit $v_i = v_{0,i} + (v_i - v_{0,i})$ ist das Integral gleich

$$\begin{aligned} v_{0,i}v_{0,k}\int f_0\mathrm{d}^3v + \int (v_i - v_{0,i})(v_k - v_{0,k}) f_0 \mathrm{d}^3 v &= v_{0,i}v_{0,k}n + \frac{\delta_{ik}}{3}\int(\vec{v}-\vec{v}_0)^2 f_0\mathrm{d}^3v \\ &= v_{0,i}v_{0,k}n + \delta_{ik}kTn. \end{aligned}$$

Somit lautet (L.3) nach Multiplikation mit n

$$0 = \rho \frac{\partial v_{0,i}}{\partial t} + v_{0,i} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_{0,i} v_{0,k} + p \delta_{ik}) = \rho(\frac{\partial v_{0,i}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) v_{0,i}) + \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

mit Hilfe von $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \vec{v}_0) = 0$.

Die letzte Gleichung folgt analog mit $\varphi = \vec{v}^{\,2}$.