Übung 1. *Idealer Paramagnet*

Wir betrachten $N \gg 1$ unhabhängige magnetische Momente mit totaler Energie E, welche unter Einfluss eines Magnetisches Feldes H die Werte $m_i = \pm m$ annehmen können. Das System wird durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben

$$\mathcal{H} = E = -\sum_{i=1}^{N} H m_i = -HM = -Hnm, \tag{1}$$

wobei $n = n_+ - n_-$ die Differenz zwischen der Anzahl negativer und positiver Momente ist, und $M = nm$ die totale Magnetisierung des Systems ist.

(a) Zeige, dass die Anzahl Zustände mit einer gewissen Magnetisierung $M = nm$ durch

$$\Omega(M) = \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N+n)]![\frac{1}{2}(N-n)]!} \tag{2}$$

gegeben ist.

(b) Berechne die Entropie $S(E,H) = k_B \log(\Omega(E,H))$. Benutze dafür die Stirling-Formel $\log N! \approx N \log N - N + \frac{1}{2}\log(2\pi N)$ für $N \gg 1$, und vernachlässige Terme der Ordnung $\log N$.

(c) Berechne die Temperatur $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_H$ und löse für $E = E(T,H)$.

(d) Die Magnetisierung ist gegeben durch $M = T\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_E$. Zeige, dass im Hochtemperaturlimes $k_B T \gg Hm$ die Magnetisierung M das Curie-Gesetz $M = N\frac{Hm^2}{k_B T}$ erfüllt.

Übung 2. *Relaxationszeitnäherung*

Wir betrachten die (kräftefreie) Boltzmann-Gleichung (BG)

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}}_{\equiv \mathcal{D}f} = \underbrace{\int d^3 v_2\, d^2 \hat{u}\, u \frac{d\sigma}{d\Omega}(f' f_1' - f f_1)}_{\equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_S}$$

und die Maxwell-Boltzmann Verteilung (MBV)

$$f_0(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}\ , \tag{3}$$

wobei n, $\vec{v}_0$, T die Teilchendichte, bzw. die mittlere Geschwindigkeit und die Temperatur sind. Dies ist aus

$$n = \int d^3 v\, f_0(\vec{v})\ , \qquad n\vec{v}_0 = \int d^3 v\, \vec{v} f_0(\vec{v})\ , \qquad n \cdot \frac{3}{2} kT = \int d^3 v\, m \frac{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}{2} f_0(\vec{v}) \tag{4}$$

ersichtlich. Die MBV $f_0(\vec{v})$ ist eine Lösung der BG, da sowohl $(\partial f_0/\partial t)_S = 0$ wie $\mathcal{D}f_0 = 0$ gelten.

Statt Konstanten n, $\vec{v}_0$, und T betrachten wir nun Felder

$$n = n(\vec{x},t)\ , \qquad \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{x},t)\ , \qquad T = T(\vec{x},t)\ . \tag{5}$$

Durch Einsetzen in (3) entsteht eine *lokale Maxwell-Boltzmann Verteilung*, $f_0 = f_0(\vec{x}, \vec{v}, t)$.

(a) Zeige, dass im allgemeinen $f_0(\vec{x}, \vec{v}, t)$ keine Lösung der BG ist, da $(\partial f_0/\partial t)_S = 0$ aber $\mathcal{D} f_0 \neq 0$ gelten.
Hinweis: Äquivalent zu (3) und (5) ist $\log f_0 = A + \vec{B} \cdot \vec{v} + C \vec{v}^{\,2}$ mit $A = A(\vec{x}, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$, $C = C(\vec{x}, t)$.

Wir berücksichtigen nun eine Korrektur g,

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{x}, \vec{v}, t) + g(\vec{x}, \vec{v}, t) \ .$$

Dabei soll g die Felder (5) nicht ändern

$$\int \varphi(\vec{v}) g(\vec{x}, \vec{v}, t) \, d^3 v = 0 \ , \qquad \text{für} \quad \varphi(\vec{v}) = 1, \ \vec{v}, \ \vec{v}^{\,2}. \tag{6}$$

Wir linearisieren den Stossterm um f_0 herum durch den Ansatz (Relaxationszeitnäherung)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_S \approx - \frac{f - f_0}{\tau} = - \frac{g}{\tau} \ , \tag{7}$$

wobei τ die Relaxationszeit ist. Dabei ist g von Ordnung τ.

(b) In erster Ordnung in τ zeige, dass

$$g = -\tau \mathcal{D} f_0 \ . \tag{8}$$

(c) Zeige, dass die Zeitentwicklung der Felder (5) durch die (kräftefreien) Euler-Gleichungen gegeben ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \vec{v}_0) &= 0 \ , \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 \right) + \vec{\nabla} p &= 0 \ , \\ \frac{3}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) T \right) + T \operatorname{div} \vec{v}_0 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $\rho = mn$ und $p = nkT$ die Massendichte und den Druck bezeichnen.
Hinweis: Setze $g = -\tau \mathcal{D} f_0$ in (6) für $\varphi = 1, v_i, \vec{v}^2$ explizit ein.