Alice

(1)

•

Bob

(2)

•

je ein Teilchen eines EPR-Paars

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle\right)$$

<u>Aufgabe</u>:

A übermittle unbekannter Zustand $|\varphi\rangle$ eines (weiteren) Teilchens (0) an B, unter blosser Verwendung klassischer Information

Unmöglich?

- Transport des Teilchens (0) und damit von $|\varphi\rangle$: qm Information

- A kann $|\varphi\rangle$ nicht messen, sondern nur (z.B.) ob Teilchen $|+\vec{e}\rangle$ oder $|-\vec{e}\rangle$ ist.

- Zustand aller drei Teilchen

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi, \vec{e}_3\rangle \otimes |-\vec{e}_3\rangle - |\varphi, -\vec{e}_3\rangle \otimes |\vec{e}_3\rangle\right)$$

- Messung von $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{4} P_i$ mit

$$|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle\right)$$

$$|\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle + |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle\right)$$

$$|\chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle\right)$$

$$|\chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle + |-\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle\right)$$

- Zst. der Teilchen <u>nach</u> Messung

$$P_1 |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{|\chi_1\rangle}^{A} \otimes \overbrace{\left(-|-\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle\right)}^{B}$$

$$P_2 |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\chi_2\rangle \otimes \left(|-\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle\right)$$

$$P_3 |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\chi_3\rangle \otimes \left(|-\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle + |\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle\right)$$

$$P_4 |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\chi_4\rangle \otimes \left(|-\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle\right)$$

- Alice übermittelt Ergebnis $i = 1, 2, 3, 4$ (2 klassische Bits) an Bob; dieser wendet folgende unitärer Operator auf Teilchen (2) an:

Alices Ergebnis	Bobs Operation	Zustand
1	$\mathbb{1}$	$-\lvert\varphi\rangle$
2	σ_3	$-\lvert\varphi\rangle$
3	σ_1	$\lvert\varphi\rangle$
4	σ_2	$-i\lvert\varphi\rangle$

(Operation ist unitäre Trsf.)

In allen Fällen ist der Zustand $\lvert\varphi\rangle$ wiederhergestellt! (Phase ohne Bedeutung)

5. Der Grover-Algorithmus

<u>Problemstellung.</u> A, B Mengen mit N Elementen, $N \gg 1$.

$$u: A \to B \quad , \quad a \mapsto b = u(a)$$

Bijektive Abbildung. Also u^{-1} auch.

<u>Aufwand</u> für

$$\text{(i)} \quad a \overset{u}{\longmapsto} b \quad , \quad \text{(ii)} \quad b \overset{u^{-1}}{\longmapsto} a$$

kann verschieden sein. Bsp. Telefonbuch

$$\begin{array}{llllll} A = \{ & \text{Anna}, & \text{Bertha}, & \ldots, & \text{Max}, & \text{Moritz}, \ldots \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ B = & 6381 & 4101 & & 7013 & 3298 \end{array}$$

Aufwände:

(i) $O(\log N)$ (ii) $O(N)$

Frage: Ist $u^{-1}(b) = a'$? Ob ja/nein (= 1/0) ist Abbildung

$$a' \longmapsto \delta_{a' u^{-1}(b)} = \delta_{u(b) a}$$

Aufwand ist (i), nicht (ii). [Orakel]

• Ausgezeichneter Zustand

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a' \in A} |a'\rangle$$

$V: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $V = 2|s\rangle\langle s| - 1$

(Spiegelung an s)

• Algorithmus

– Initialisiere System in $|s\rangle$
(Aufwand $O(\log N)$)

– Bilde

$$|\psi\rangle = (VU)^k |s\rangle$$

mit $k = [\frac{\pi}{4}\sqrt{N}]$

– Messung: In welchem Zst. $|a'\rangle$ $(a' \in A)$ ist $|\psi\rangle$? Mit grosser W'keit in $a' = a$:

$$W = |\langle a|\psi\rangle|^2 = 1 - O(\tfrac{1}{N})$$

Beachte: Massgeblicher Aufwand ist

$$k = O(\sqrt{N}).$$

Beweis.

- Anfangszustand $|s\rangle = |\theta_0\rangle$

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- Iterationsschritt $|\theta\rangle \mapsto |\theta'\rangle = VU|\theta\rangle$

$$\theta' = 2\theta_0 + \theta$$

Folglich: $\theta_0, 3\theta_0, 5\theta_0, \dots, (2k+1)\theta_0 \dots$

Wann $\theta_k = (2k+1)\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$?

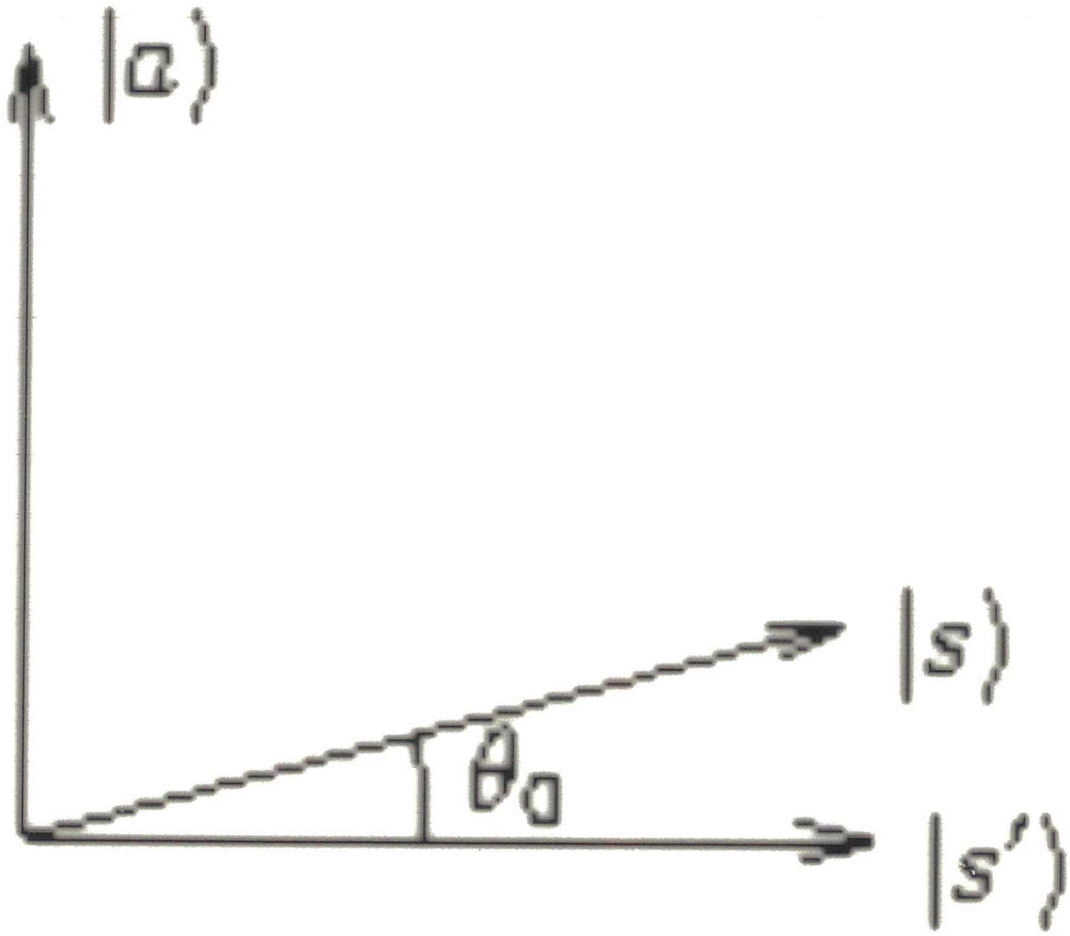
$$k \approx \frac{\pi}{4\theta_0} + O(1)$$

Dann $\cos\theta_k = O(\theta_0) = 1/\sqrt{N}$

$$1 - W = |\langle s' \underbrace{|\theta_k\rangle}_{|\psi\rangle}|^2 = \cos^2\theta_k = \frac{1}{N}.$$

Unterraum, durch $|a\rangle, |s\rangle$ aufgespannt

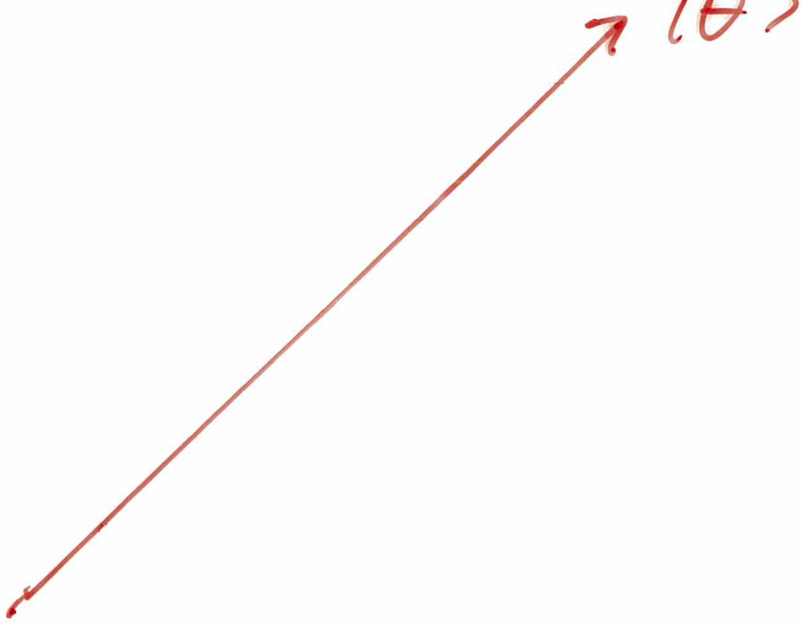
$$\langle s|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} = \sin\theta_0$$



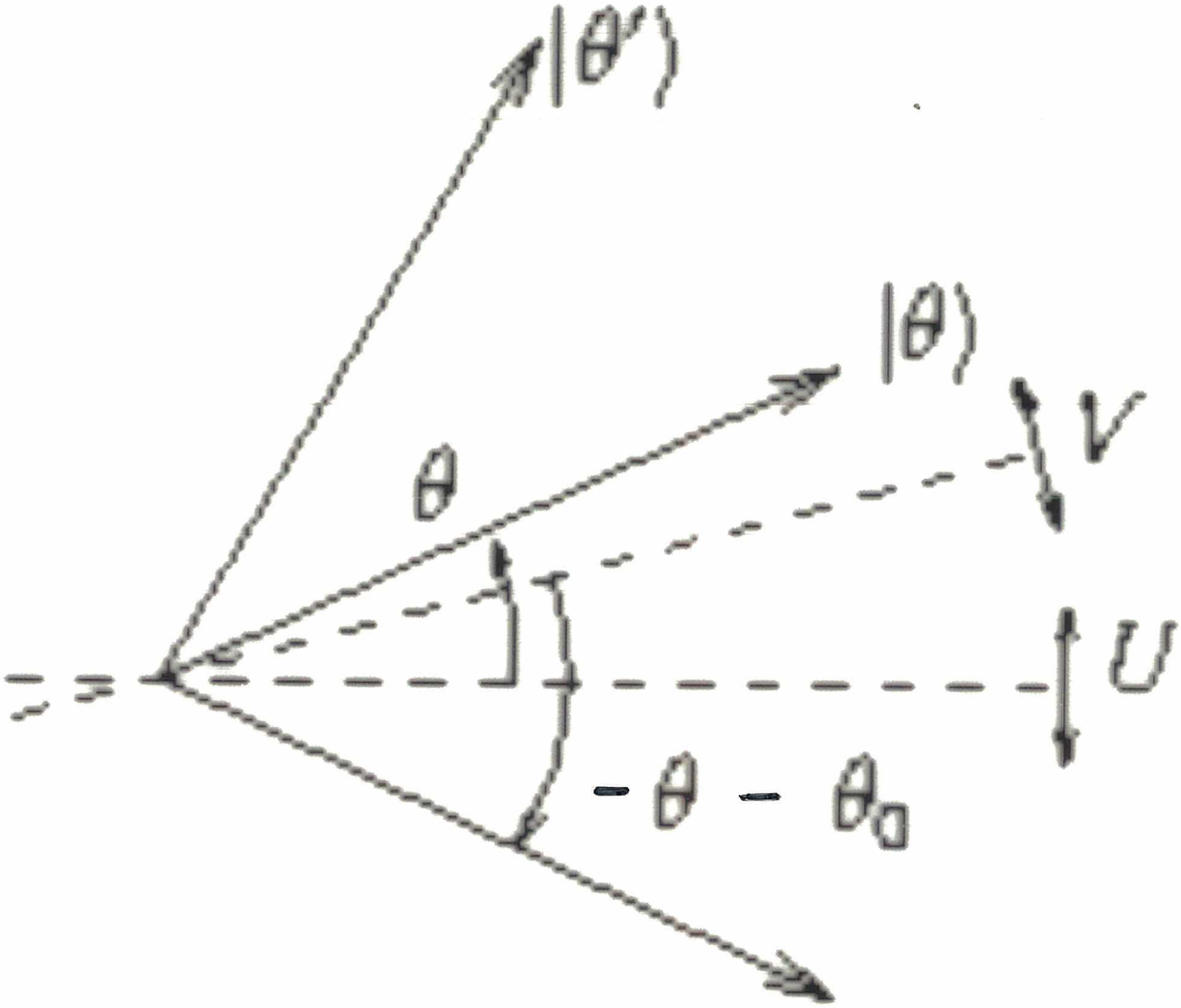
$$|s'\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\substack{a' \in A \\ a' \neq a}} |a'\rangle$$

$$|\theta\rangle = (\cos\theta)\,|s'\rangle + (\sin\theta)\,|a\rangle$$

$(\theta = \pi/2)$



$(\theta = \theta_0)$



|θ′)
|θ)
θ
V
U
-θ - θ0