Any serious consideration of a physical theory must take into account the distinction between the objective reality, which is independent of any theory, and the physical concepts with which the theory operates. These concepts are intended to correspond with the objective reality, and by means of these concepts we picture this reality ourselves.

(Einstein, Podolsky, Rosen)

Die Arbeit von Einstein, Podolsky, Rosen:

- Hinreichendes Kriterium für ein Element
(i) physikalischer Wirklichkeit:

"Falls wir, ohne das System in irgend einer Art zu stören, mit Sicherheit (d.h. mit W'keit gleich Eins) den Wert einer physikalischen Grösse voraussagen können, dann existiert ein Element physikalischer Wirklichkeit, das dieser physikalischen Grösse entspricht"

- Notwendiges Kriterium, damit eine Theorie
(ii) vollständig ist:

"Jedes Element physikalischer Wirklichkeit muss ein Gegenstück in der physikalischen Theorie haben"

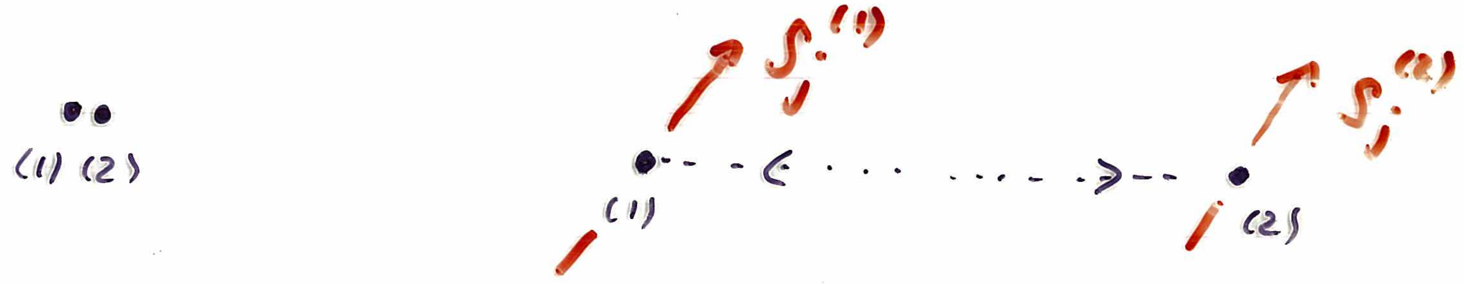
- Schlussfolgerung:

"Wir haben gezeigt, dass die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit liefert; wir haben die Frage offen gelassen, ob eine solche Beschreibung existiert. Wir glauben aber, dass eine solche Theorie möglich ist."

EPR Anordnung (nach Bohm): Zwei Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen:

vorher

nachher



(z.B. Zerfall $\pi \to e^- e^+$)

Spinzustand

$$|\psi\rangle \equiv |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_1, -\vec{e}_1\rangle - |-\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_2, -\vec{e}_2\rangle - |-\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle\right)$$

Die Messungen* von $S_j^{(1)}$ und $S_j^{(2)}$ ergibt

$(S_j^{(1)}, S_j^{(2)}) = (\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2})$ mit W'keit $\frac{1}{2}$

$(S_j^{(1)}, S_j^{(2)}) = (-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2})$ " $\frac{1}{2}$

* raumartig getrennte Ereignisse

Für $j = 1, 2$ oder 3 könnte $S_j^{(1)}$ bestimmt werden durch Messung von $S_j^{(2)}$ ($\rightarrow S_j^{(1)} = -S_j^{(2)}$), also ohne Teilchen (1) in irgend einer Art zu stören.

Nach EPR:

$S_j^{(1)}$, ($j = 1, 2$ und 3) sind je ein Element phys. Wirklichkeit, das in einer vollständigen Theorie ein Gegenstück haben muss

$\rightarrow$ Die QM ist nicht (EPR-) vollständig: Bestimmte Werte hat eine Observable in der QM nur in Eigenzuständen. Ein gemeinsamer Eigenzustand von $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}$ mit Eigenwerten $\pm \hbar/2$ ist unmöglich wegen

$$[S_1^{(1)}, S_2^{(1)}] = i\hbar S_3^{(1)}$$

Bohrs Entgegnung

"es kann keine Rede sein einer mechanischen Störung des untersuchten Systems"

"... da ist die Frage einer Beeinflussung der eigentlichen Bedingungen, die die möglichen Sorten von Voraussagen über das zukünftige Verhalten des Systems festlegen. Da diese Bedingungen einen inhärenten Bestandteil der Beschreibung jedes Phänomens bilden, dem der Ausdruck "physikalische Wirklichkeit" zugewiesen werden kann, sehen wir, dass die Argumentation der erwähnten Autoren ihre Schlussfolgerung, dass die quantenmechanische Beschreibung unvollständig sei, nicht gerechtfertigt."

Gibt es (im Sinne von EPR) voll-
ständige Theorien, die entweder:

(a) die QM reproduzieren?

oder

(b) von der QM abweichen,
aber durch das Experiment
bestätigt werden?

Modelle "verborgener Variablen"

- Verborgene Variablen (reine Zustände)

  $\omega \in \Omega$ (Ω: W'keitsraum)

- Statistische Mischungen

  $\rho(\cdot)$: W'keitsmass auf Ω

- Observablen

  $A(\omega)$: Funktionen auf Ω

  ($A(\omega)$: Wert von A in ω)

→ Erwartungswerte

$$\langle A \rangle = \int A(\omega)\, d\rho(\omega)$$

Kann ein Modell verborgener Variablen die QM reproduzieren?

Auslegung (V-): Es gibt Abbildungen

Zustände $\psi \longmapsto$ W'keitsmasse $\rho_\psi(\cdot)$

Observablen $A = A^* \longmapsto$ Funktionen $A(\cdot)$

sodass: Falls $A = \sum_i a_i P_i$ die Spektralzerlegung ist, so

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = \rho_\psi(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = a_i\}) \quad (1$$

(d.h. QM und V- liefern selbe W'keiten für Messergebnisse).

Kann die QM durch eine Theorie verborgener Variablen reproduziert werden?

Auslegung
- $V-$ (schwächer)
- $V+$ (stärker)

<u>$V-$</u>: Es gibt einen Raum Ω ($\omega \in \Omega$ ist die verborgene Variable) und zwei Abbildungen

Zustände $\psi \mapsto$ W'keitsverteilungen $dp_\psi(\omega)$ auf Ω

Observablen $A = A^* \mapsto$ Funktion $A(\omega)$ auf Ω ($A(\omega)$ ist Wert der Observablen in ω)

sodass qm W'keiten für Messwerte wiedergegeben werden:

<u>Ist</u> $A = \sum_i a_i P_i$ die Spektralzerlegung von A, so gilt

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = p_\psi(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = a_i\})$$

Folgerungen aus (W-):

- $A(\omega) \in \{a_1, \dots a_n\}$ (ρ_ψ - fast sicher) (2)
- $\langle\psi|A|\psi\rangle = \int_\Omega A(\omega)\, d\rho_\psi(\omega)$ (3)
- $A|\psi\rangle = a_1|\psi\rangle \Rightarrow A(\omega) = a_1$ (ρ_ψ - fast sicher)

Antwort: Ja, V- ist möglich.

Kritik: In der QM ist der Projektor P eines Ereignisses fundamentaler als die Observable („Kontext"), in dessen Spektralzerlegung er vorkommt.

Es ist möglich:

$P = P_i$ für ein i in $A = \sum_i a_i P_i$

und

$P = \tilde{P}_j$ für ein j in $\tilde{A} = \sum_j \tilde{a}_j \tilde{P}_j$

(Bsp: (Spin $\frac{1}{2}$): $A = \vec{S} \cdot \vec{e}$, $\tilde{A} = \vec{S} \cdot (-\vec{e})$.)

V- lässt es zu, dass

$$\{\omega \in \Omega \,/\, A(\omega) = a_i\} \neq \{\omega \in \Omega \,/\, \tilde{A}(\omega) = \tilde{a}_j\}$$

$\underline{V+}^{*}$: Ω, $\psi \mapsto d\rho_\psi$ wie vorher.

Statt $A \mapsto A(\omega)$, neu: Abbildung

Projektoren $P = P^2 = P^* \longmapsto$ Teilmengen $P \subset \Omega$

sodass

$$\langle \psi | P | \psi \rangle = \rho_\psi (P)$$

$$\sum_i P_i = \mathbb{1} \Rightarrow \{P_i\} \text{ ist Partition von } \Omega$$

Antwort: $V+$ ist möglich, falls $\dim \mathcal{H} = 2$.
sonst:

Satz (Kochen, Specker 1967) Sei $\dim \mathcal{H} \geq 3$. Dann ist $V+$ nicht möglich.

* Nicht-Kontextualität

Folgerungen aus V+ :

1) V+ $\Rightarrow$ V−, und zwar mit

$$A(\omega) := \sum_i a_i \chi_{P_i}(\omega)$$

für $A = \sum_i a_i P_i$.

2) $f(A)(\omega) = f(A(\omega))$

3) Falls $[A_1, A_2] = 0$

(und demzufolge $(A_1 A_2)^* = A_1 A_2$),

so

$$(A_1 A_2)(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega).$$

Alternative zu V+ (schwächer)

L: Lokalitätshypothese (im Rahmen von V−)

Sei $A = A^*$, $B = B^*$. Falls

- $[A, B] = 0$ (also $(AB)^* = AB$)
- A, B zu raumartig getrennten Messungen gehören,

dann $(AB)(\omega) = A(\omega) B(\omega)$

Satz (Bell 1964)

Die QM ist unvereinbar mit (V−, L)

(Bem: $V+ \Rightarrow L$)

Die Bellschen Ungleichungen

beziehen sich nicht auf die QM sondern auf beliebige lokale Theorien verborgener Variablen:

1) Zustände ≡ W'keitsverteilungen $d\rho(\omega)$, Observablen ≡ Funktionen $A(\omega)$ auf Zustandsraum $\Omega \ni \omega$, sodass Erwartungswerte

$$\langle A \rangle_\rho = \int_\Omega A(\omega)\, d\rho(\omega).$$

2) Lokalität: Entsprechen A, B raumartig getrennten Messungen, so

$$(AB)(\omega) = A(\omega)\, B(\omega).$$

Beachte: Übereinstimmung mit QM nicht verlangt.

<u>Satz</u> (CHSH Ungleichung; Clauser, Horne, Shimony, Holt, 1969).

Seien A, A' von B, B' raumartig getrennt; alle mit Werten ± 1.

Dann:

$$|\langle AB\rangle + \langle A'B\rangle + \langle AB'\rangle - \langle A'B'\rangle| \leq 2$$

<u>Beweis</u>: Es ist

$$-2 \leq (A(\omega)+A'(\omega))B(\omega) + (A(\omega)-A'(\omega))B'(\omega) \leq 2$$

und zwar ist der Ausdruck $= \pm 2$; denn:

$$A(\omega) = A'(\omega) \Rightarrow \begin{array}{l} A(\omega)+A'(\omega) = \pm 2 \\ A(\omega)-A'(\omega) = 0 \end{array}$$

$$A(\omega) = -A'(\omega) \Rightarrow \begin{array}{l} A(\omega)+A'(\omega) = 0 \\ A(\omega)-A'(\omega) = \pm 2 . \end{array}$$

Bildung des Erwartungswerts liefert CHSH. $\square$

Anwendung: • "Spin $\frac{1}{2}$"-Teilchen, Messung der Spinkomponente

$$S_{\vec{n}} =: \frac{\hbar}{2} \sigma_{\vec{n}}$$

in Richtung $\vec{n}$, $(|\vec{n}| = 1)$.

- Teilchen 1, 2 (zu geg. Zeitpunkt) räumlich getrennt
- Observablen

$$A = \sigma^{(1)}_{\vec{n}_1}, \quad A' = \sigma^{(1)}_{\vec{n}_1'}, \quad B = \sigma^{(2)}_{\vec{n}_2}, \quad B' = \sigma^{(2)}_{\vec{n}_2'}$$

- Korrelationen

$$C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) := \langle \sigma^{(1)}_{\vec{n}_1} \sigma^{(2)}_{\vec{n}_2} \rangle$$

- CHSH:

$$|C(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + C(\vec{n}_1', \vec{n}_2) + C(\vec{n}_1, \vec{n}_2') - C(\vec{n}_1', \vec{n}_2')| \leq 2 .$$

Korrelationen quantenmechanisch berechnet:

$$\sigma^{(i)}_{\vec{n}} = \vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{n}$$

mit $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Pauli-Matrizen

Zustand : EPR-Paar

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{n}, -\vec{n}\rangle - |-\vec{n}, \vec{n}\rangle\right)$$

(unabhängig von $\vec{n}$). Es gilt:

$$(\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot \vec{n}\, |\psi\rangle = 0 \quad , \quad \langle\psi|\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}\, |\psi\rangle = 0$$

Also:

$$\underline{C(\vec{n}_1, \vec{n}_2)} = \langle\psi|(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{n}_2)|\psi\rangle$$

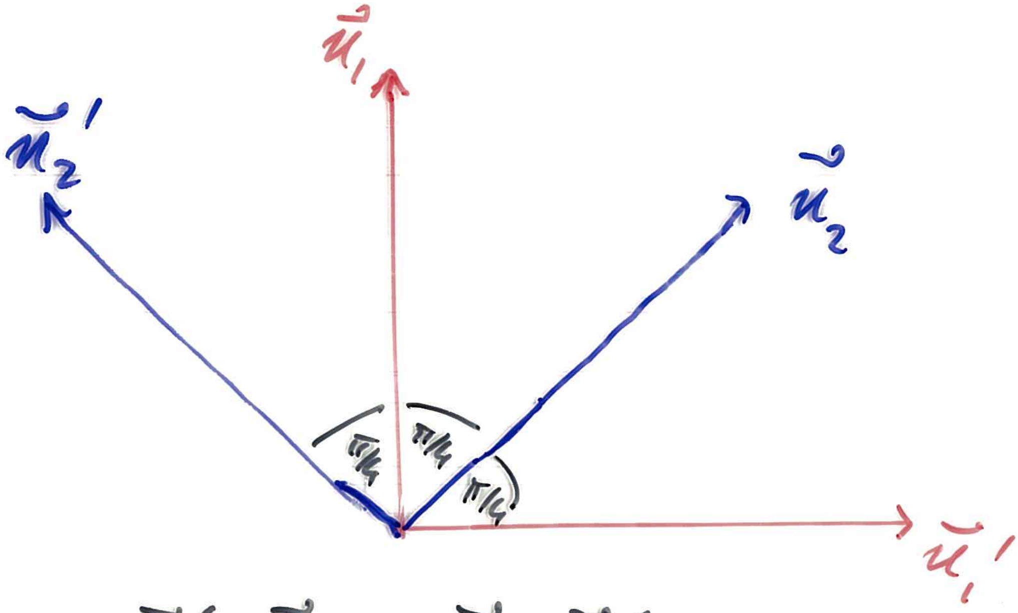
$$= -\langle\psi|\underbrace{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_1)(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_2)}_{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)\mathbb{1} + i\,\vec{\sigma}^{(1)} \cdot (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)}|\psi\rangle = \underline{-\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}$$

Erfüllt QM die CSCH-Ungleichung?
D.h. gilt

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2' - \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2'| \leq 2 \quad (*)$$

für alle $\vec{n}_i, \vec{n}_i'$ mit $|\vec{n}_i| = |\vec{n}_i'| = 1$?

Antwort: Nein:



$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2' = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

und (*) verlangt

$$2\sqrt{2} \leq 2 \quad : \text{Nein.}$$

→ (nochmals)

QM kann nicht durch eine lokale Theorie verborgener Variablen reproduziert werden: