Darstellungen

- **Def.** U ist eine Darstellung von $SO(3)$ auf dem Vektorraum $\mathcal{H}$, falls

$$U: SO(3) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\text{lin. Abb. } \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$$
$$R \longmapsto U(R)$$

ein Homomorphismus ist

$$U(R_1)\,U(R_2) = U(R_1 R_2)\,, \quad U(1) = 1\,.$$

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U(R)^{-1} = U(R)^*$, so heisst U unitär.

- Jede Darstellung von $SO(3)$ induziert eine von $so(3)$ durch

$$U(\Omega) = \frac{d}{dt}\, U(R(t))\Big|_{t=0} \qquad (\Omega, R(t) \text{ wie vorh}$$

$$\rightarrow \qquad U([\Omega_1, \Omega_2]) = [U(\Omega_1), U(\Omega_2)]$$

<*

Dabei ist $U(R)$ durch $U(\Omega)$ bestimmt:

$$U(e^{\Omega t}) = e^{U(\Omega) t}$$

(Nicht jede Darstellung von $so(3)$ muss aus einer von $SO(3)$ stammen!)

* Falls U unitär, so $U(\Omega)^* = -U(\Omega)$

- $U(R)$ unitär $\rightarrow$ $U(\Omega)^* = -U(\Omega)$

Selbstadjungiert sind

$M(\vec{\omega}) := i\,U(\Omega(\vec{\omega}))$, insb. für $\vec{\omega} = \vec{e}_i$:

$$M_i = i\,U(\Omega_i)$$

$\rightarrow$ $[M_1, M_2] = i M_3$ & zykl.

- Eine Darstellung heisst <u>irreduzibel</u> falls $\{0\}$, $\mathcal{H}$ die einzigen invarianten Teilräume sind.

- Jede (endlich dim.) Darstellung zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler.

- <u>Heute</u>: Klassifiziere alle iDs der $so(3)$ (damit sind auch die der $SO(3)$ erfasst).

SO(3) und so(3)

- so(3) besteht aus "infinitesimalen Drehungen"

$$\Omega = \frac{d}{dt} R(t)\Big|_{t=0}$$

wobei $R(t) \in SO(3)$ diff.bar mit $R(0) = 1$

Bsp: $R(t)$ 1-param. Gruppe. Dann $R(t) = e^{\Omega t}$.

- so(3) ist (reelle) Lie-Algebra: reeller Vektorraum mit dem antisymm. Produkt

$$[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1 \quad ;$$

zudem

$$R \Omega R^{-1} \in so(3) \qquad (\Omega \in so(3), R \in SO(3))$$

- $\Omega \in so(3)$ ist von der Form $\Omega = \Omega(\vec{\omega})$:

$$\Omega(\vec{\omega})\vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} \qquad \text{für ein } \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$$

$$\rightarrow \quad [\Omega(\vec{\omega}_1), \Omega(\vec{\omega}_2)] = \Omega(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2)$$

bzw. mit $\Omega_i := \Omega(\vec{e}_i)$

$$[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_3 \quad \& \text{ zykl.}$$

Drehung $R \in SO(3)$, $\vec{x} \mapsto R\vec{x}$ $(\vec{x} \in \mathbb{R}^3)$

Zustand $\psi \in \mathcal{H}$ eines q.m. Systems trasformiert dabei gemäss

$$\psi \longmapsto U(R)\psi,$$

wobei $U(R)$ eine Darstellung von $SO(3)$ ist:

$$U : SO(3) \to \{\text{lin. Abb. } \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$$
$$R \mapsto U(R)$$

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1 R_2), \quad U(\mathbb{1}) = 1,$$

die unitär ist: $U(R)^{-1} = U(R)^*$.

Bemerkung: Zustand in der QM ist eine Äquivalenz-klasse von Vektoren

$$[\psi] = \{ e^{i\alpha}\psi \mid \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

→ Darstellung der $SO(3)$ auf $\mathcal{H}$ muss bloss eine <u>projektive</u> sein: $U(R)$ nur bis auf Phase definiert.

<u>Def</u>. Eine (unitäre) Darstellung U der Lie-Algebra $so(3)$ in $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung

$$U : so(3) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\text{lin. Abb. } \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$$
$$\Omega \longmapsto U(\Omega)$$

mit

$$U(\alpha_1 \Omega_1 + \alpha_2 \Omega_2) = \alpha_1 U(\Omega_1) + \alpha_2 U(\Omega_2)$$
$$(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

$$U([\Omega_1, \Omega_2]) = [U(\Omega_1), U(\Omega_2)]$$

$$U(\Omega)^* = -U(\Omega).$$

Beachte: Def. setzt <u>nicht</u> voraus, dass U durch eine Darstellung der $SO(3)$ induziert wird,

$$U(\Omega) = \frac{d}{dt} U(R(t))\Big|_{t=0}$$

für $\Omega = dR(t)/dt\,|_{t=0}$, $R(0) = \mathbb{1}$.

Jede Darstellung der $SO(3)$ induziert eine der $so(3)$ mittels

$$U(\Omega) = \frac{d}{dt} U(R(t))\Big|_{t=0}$$

falls $\Omega = \frac{dR(t)}{dt}\Big|_{t=0}$, $(R(0) = 1)$. Dabei ist $U(R)$ durch $U(\Omega)$ bestimmt:

$$U(e^{\Omega t}) = e^{U(\Omega) t}$$

Aber: Nicht jede Darstellung der $so(3)$ wird so induziert. Unter den Irreduziblen

$$D_j, \quad (j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots)$$

nur jene mit j <u>ganzzahlig</u>.

SU(2) und su(2)

- $SU(2) = \{ V \text{ kompl. } 2\times2 \text{ Matrix} \mid V^* V = 1, \det V = 1 \}$
mit Lie-Algebra (infinitesimale Elemente)
$su(2) = \{ A \text{ kompl. } 2\times2 \text{ Matrix} \mid A^* + A = 0, \operatorname{sp} A = 0 \}$

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1$$

zudem

$$V A V^* \in su(2) \quad , \quad (A \in su(2), V \in SU(2))$$

- $A \in su(2)$ ist von der Form $A = A(\vec{a})$

$$A(\vec{a}) = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - i a_2 \\ a_1 + i a_2 & -a_3 \end{pmatrix} = \frac{-i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{a}$$

mit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\rightarrow \quad [A(\vec{a}), A(\vec{b})] = A(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

bzw. mit $A_i = A(\vec{e}_i)$

$$[A_1, A_2] = A_3 \quad \& \text{ zykl.}$$

$\rightarrow$ $su(2)$ und $so(3)$ sind isomorph über

$$su(2) \rightarrow so(3) \quad , \quad A(\vec{\omega}) \mapsto \Omega(\vec{\omega})$$

Die iDs der $su(2)$ sind die $\mathcal{D}_j$'s $(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$

- Jede Ds von $SU(2)$ induziert eine von $su(2)$ durch

$$U(A) = \frac{d}{dt} U(V(t))\Big|_{t=0} ,$$

falls $A = \frac{d}{dt} V(t)\Big|_{t=0}$, $(V(0) = 1)$. Dabei ist $U(V)$ durch $U(A)$ bestimmt:

$$U(e^{At}) = e^{U(A)t}$$

- Bsp: fundamentale Ds der $SU(2)$: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $U(V) = V$, bzw. $U(A) = A$. Entspricht $\mathcal{D}_{1/2}$.

- <u>Satz</u> Jeder Ds $\mathcal{D}_j$ $(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$ der $su(2)$ entspricht eine, U_j, der $SU(2)$. Dabei gilt

$$U_j(-V) = (-1)^{2j} U_j(V).$$

$$A \in su(2) \iff A = A(\vec{a}) = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{3} \sigma_j a_j \equiv -\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{a}$$
$$(\vec{a} \in \mathbb{R}^3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \quad \& \text{ zykl.}$$

Lie-Algebra <u>Isomorphismus</u>

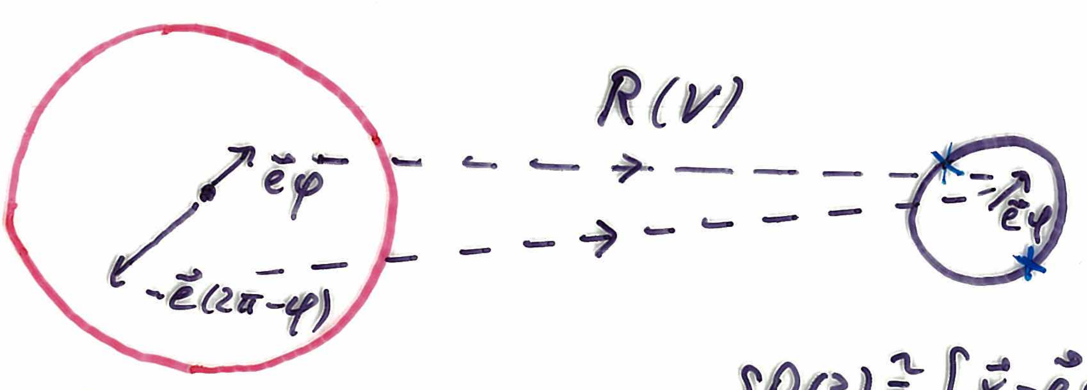
$$su(2) \longrightarrow so(3)$$
$$A(\vec{a}) \longmapsto \Omega(\vec{a}), \qquad \Omega(\vec{a})\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{x}$$

insb. $A_j := A(\vec{e}_j) = -\frac{i}{2}\sigma_j \longmapsto \Omega_j := \Omega(\vec{e}_j)$

Gruppen <u>Homomorphismus</u>

$$SU(2) \longrightarrow SO(3)$$
$$V \longmapsto R, \qquad V A(\vec{a}) V^* = A(R\vec{a})$$
$$\text{Kern} = \{\pm 1\}, \qquad R(-V) = R(V)$$

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm \mathbb{1}\}$$



$SU(2) \cong \{\vec{x} = \vec{e}\varphi \mid |\varphi| \leq 2\pi\}$
mit Rand ≡ 1 Punkt

$SO(3) \cong \{\vec{x} = \vec{e}\varphi \mid |\varphi| \leq \pi\}$
mit identifizierten Diametralpunkt

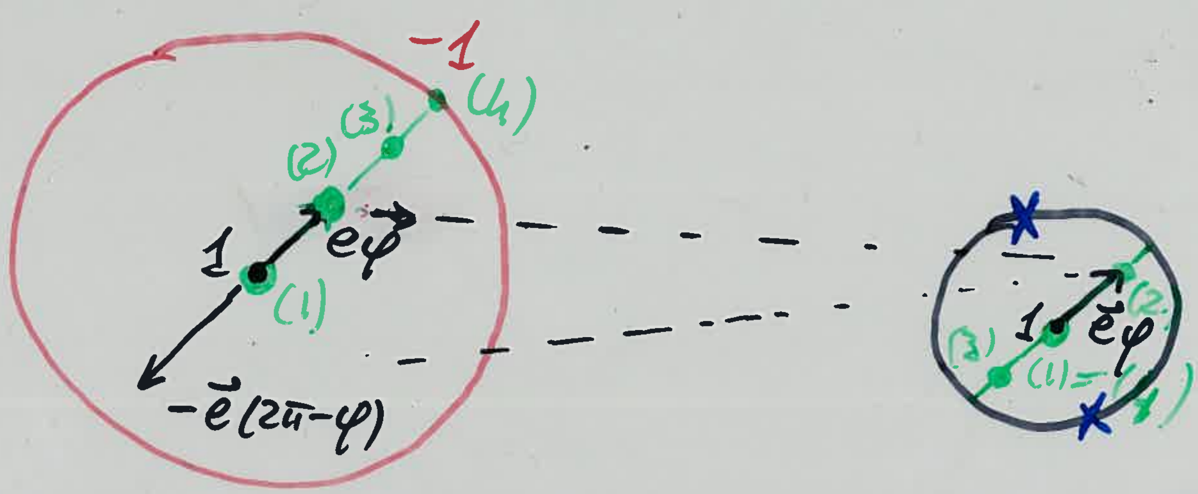
[Die fundamentale Darstellung der]
so(3) als Darstellung der su(2)

$$R : su(2) \longrightarrow so(3)$$
$$A(\vec{a}) \longmapsto \Omega(\vec{a})$$

$$\left(A(\vec{a}) = \frac{-i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{a} \quad , \quad \Omega(\vec{a})\vec{x} = \vec{a}\wedge\vec{x} \right)$$

Äquivalent: $A \mapsto \Omega$ bestimmt durch

$$[A, A(\vec{b})] = A(\Omega\vec{b}) \quad , \quad (\vec{b}\in\mathbb{R}^3)$$



$SU(2) \cong \{\vec{x} = \vec{e}\varphi \mid 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

mit Rand ≡ 1 Punkt

$$V = 1\cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{e})\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= V(\vec{e},\varphi)$$

$$= -V(-\vec{e}, 2\pi-\varphi)$$

SU(2) ist einfach zusammenhängend

$SO(3) \cong \{\vec{x} = \vec{e}\varphi \mid 0 \le \varphi \le \pi\}$

mit identifizierten Diametral<u>punkten</u>

$$R = R(\vec{e},\varphi)$$

$$= R(-\vec{e}, 2\pi-\varphi)$$

SO(3) ist nicht einfach zusammenhängend

(ist zweifach zusammenhängend)

Zusammengesetzte Systeme:

<u>Tensorprodukt</u>

<u>Klassisch</u>: Systeme 1, 2 mit Zuständen / Zustandsräumen $z_i \in \mathcal{S}_i$, $(i=1,2)$.
Zusammengesetztes System

$$(z_1, z_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \qquad \text{(kart. Prod.)}$$

Quantenmechanisch: Aus $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ wird <u>nicht</u> $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, sondern das Tensorprodukt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

"Praktische" Definition: $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist ein Hilbertraum

- mit Abbildung

$$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$
$$(\psi_1, \psi_2) \longmapsto \psi_1 \otimes \psi_2$$

Bilinear: linear in ψ_1 und in ψ_2

→ Nebst "typischen Tensoren" $\psi_1 \otimes \psi_2$ enthält $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ auch Superpositionen

$$\psi_1 \otimes \psi_2 + \varphi_1 \otimes \varphi_2$$

- Skalarprodukt

$$(\psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2) := (\psi_1, \varphi_1)(\psi_2, \varphi_2)$$

und (Anti-) Linearität.

Tensorprodukt von Operatoren A_i auf $\mathcal{H}_i$:

$$A_1 \otimes A_2 \quad \text{auf} \quad \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2,$$

definiert durch

$$(A_1 \otimes A_2)(\psi_1 \otimes \psi_2) = A_1\psi_1 \otimes A_2\psi_2$$

und Linearität.

<u>Satz</u> Die endlich dimensionalen iDs, $\mathcal{D}_j$, der SO(3) sind parametrisiert durch

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

Es gilt

$$\dim \mathcal{D}_j = 2j+1$$

$$\vec{M}^2 \psi = j(j+1)\psi \qquad (\psi \in \mathcal{D}_j)$$

<u>Bemerkung</u> Von SO(3) stammen nur die Ds mit j <u>ganzzahlig</u>

Clebsch-Gordan Reihe:

$$\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \mathcal{D}_{j_1+j_2} \oplus \mathcal{D}_{j_1+j_2-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_{|j_1-j_2|}$$

Irreduzible Darstellung $\mathcal{D}_j$:

Ausgezeichnete Basis* (orthonormiert)

$$\{|j,m\rangle\}_{m=-j}^{j}$$

mit

$$\vec{M}^2 |j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$$

$$M_3 |j,m\rangle = m |j,m\rangle$$

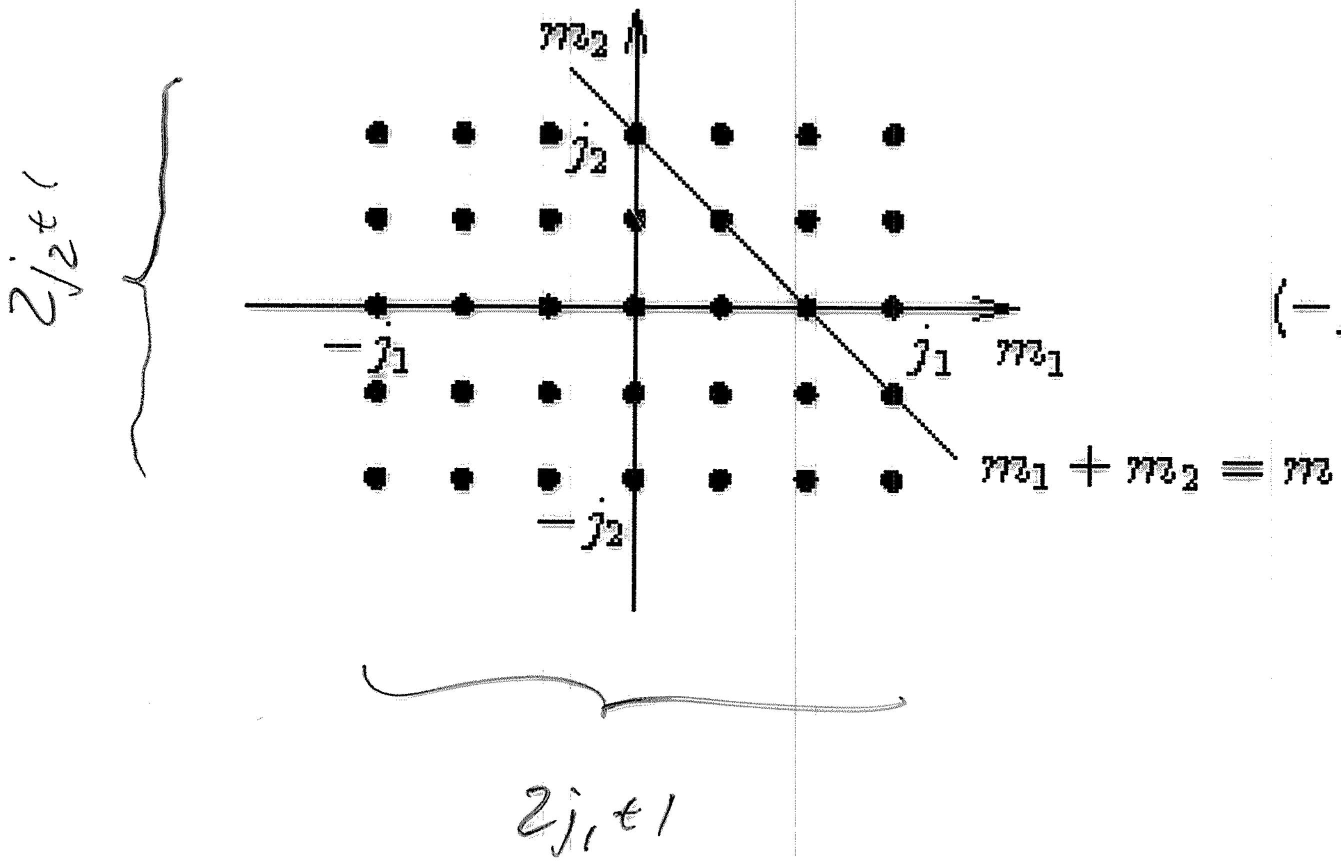
$$M_\pm |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j,m\pm 1\rangle$$

für $M_\pm = M_1 \pm i M_2$

Basis eindeutig bis auf Phase von $|j,j\rangle$.

* Normalbasis

$$\dim \mathcal{D}_j = 2j+1$$



$$(-j_i \leq m_i \leq j_i,\ i = 1, 2)$$

$(j_1 > j_2)$

<u>Spin</u>: Freiheitsgrad mit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
und (fundamentale) Darstellung
$U(V) = V$ der $SU(2) \ni V$
($\rightarrow$ Darst. ist $\mathcal{D}_{1/2}$)

Drehimpuls (Spin) $\vec{S} = \hbar \vec{M}$
mit $\vec{M}\cdot\vec{e}$ Erzeugende der Drehungen
um Achse $\vec{e}$:

$$\vec{M}\cdot\vec{e} = i\,A(\vec{e}) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{e}$$

(aufgrund des Isomorphismus $SO(3) \rightarrow SU(2)$,
$\Omega(\vec{e}) \longrightarrow A(\vec{e})$)

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \text{Pauli-Matrizen}$$

$$M_3 = \frac{\sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Normalbasis $|j=\frac{1}{2}, m\rangle$ $(m = \pm 1/2)$ ist
Standardbasis für $\mathbb{C}^2$:

$$|\vec{e}_3\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |-\vec{e}_3\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bahn und Spin

Hilbertraum eines Elektrons

$$\mathcal{H} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bahn}}}{L^2(\mathbb{R}^3)} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spin}}}{\mathbb{C}^2}$$

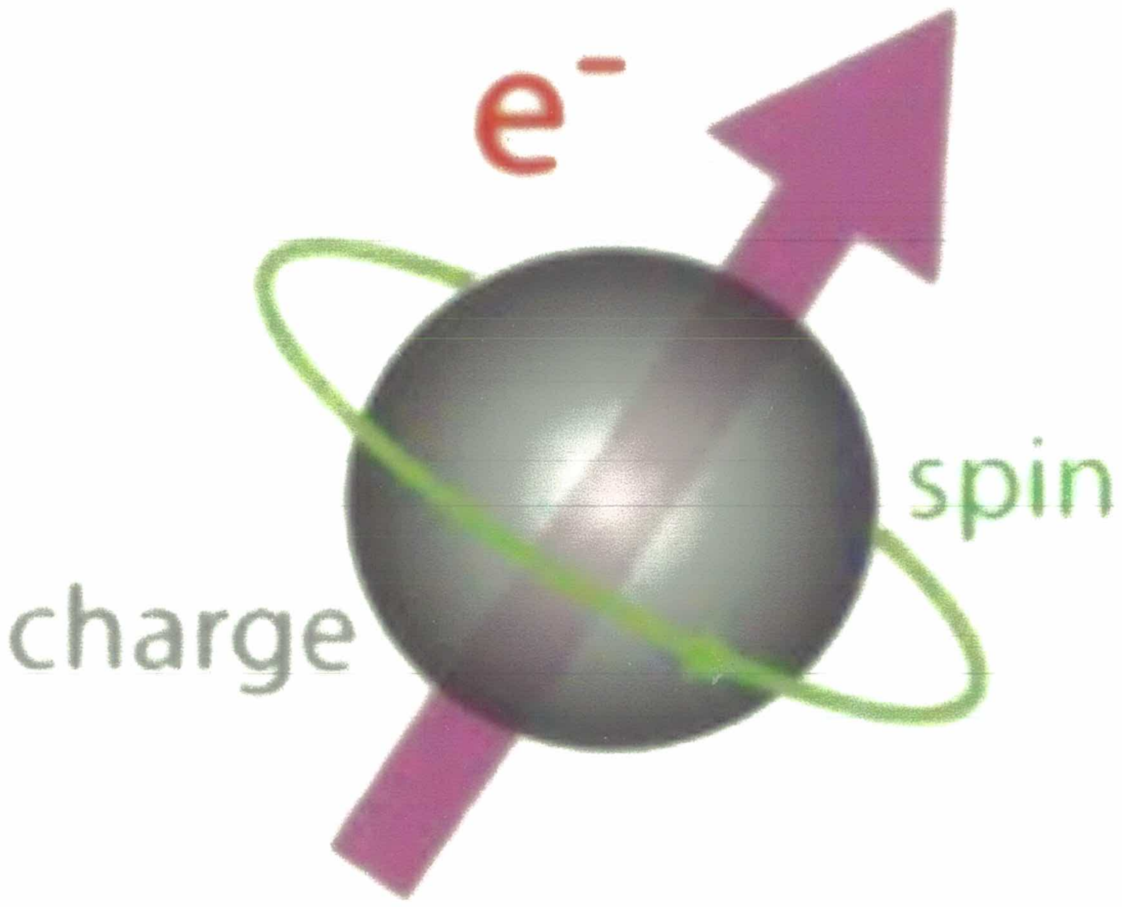
mit Darstellung

$$U(V) = U(R(V)) \otimes V$$

$$\left((U(R)\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}) \;,\; \psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right)$$

Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bahndrehimpuls}}}{\vec{L} \otimes 1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spindrehimpuls}}}{1 \otimes \vec{S}}$$


e⁻
spin
charge