Quantenmechanik II. Übung 10.

FS 14 *Abgabe:* Di 13. Mai 2014

1. Weisser Zwerg, Teil 2

Es soll gezeigt werden, dass (a) für kleine Sternmassen M eine Masse-Radius Beziehung der Form $MR^3 = \text{konst}$ gilt; (b) es eine kritische Masse M_* (Chandrasekhar-Masse) gibt so, dass der Stern instabil gegen Kollaps ist, falls $M \geq M_*$.

Zwei Überlegung führen unabhängig voneinander zum Ziel: Eine (i), die bloss auf Grössenordnungen achtet, und eine (ii-iv) die quantitativ präzise ist.

i) Betrachte den Stern in grober Näherung als eine Kugel vom Radius R aus N Elektronen und N/Z Kernen auf (Z Kernladungszahl). Wie gross ist der Fermi-Impuls $p_F = \hbar k_F$? Schätze die (relativistische) kinetische Energie des Sterns so, als ob alle Elektronen Impuls p_F hätten; und die (gravitationelle) potentielle Energie, als ob alle Paare Abstand R hätten. Minimiere die Summe der kinetischen und potentiellen Energie als Funktion von R. Wie verhält sich der optimale Radius R als Funktion von N? Zeige

$$M_* \approx \frac{(\hbar c)^{3/2}}{G^{3/2} m_0^2} ,$$

wobei alle dimensionslosen Faktoren gleich 1 gesetzt wurden.

ii) Verwende die Chandrasekhar-Gleichung

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\Big) = -\Big(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\Big)^{3/2} \tag{1}$$

für $z_c\varphi > 1$ und Randbedingungen $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, wobei $\varphi(\xi)$ und z_c in Teil 1 der Aufgabe definiert wurden:

$$\varphi(\xi) = z_c^{-1}\sqrt{1 + (p_{\mathrm{F}}(r)/mc)^2} , \qquad (r = \lambda\xi) . \tag{2}$$

Sei ξ_1 so, dass $z_c\varphi(\xi_1) = 1$.

Leite die Masse-Radius Beziehung des Sterns her, und zwar in der parametrischen Form

$$R = \frac{\xi_1}{K z_c} , \tag{3}$$

$$M = \Big(\frac{3\pi}{4}\Big)^{1/2} \xi_1^2 |\varphi'(\xi_1)| \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{(m_0/Z)^2} , \tag{4}$$

wobei $\varphi'(\xi_1) < 0$.

Hinweis: Drücke die Dichte $\rho(r)$ in $M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$ durch $p_F(r)$ und schliesslich durch $\varphi(\xi)$ aus.

iii) Schliesse daraus, dass der ultra-relativistische Grenzfall ($z_c \to \infty$) einer kritischen Masse M_* entspricht mit $R \to 0$ (Kollaps). Zur quantitativen Auswertung, verwende dass in diesem Fall

$$\xi_1 = 6.897 , \qquad \xi_1^2\, \varphi'(\xi_1) = -2.018 . \tag{5}$$

Drücke das Resultat für M_* in Einheiten der Sonnenmasse $M_\odot = 1.98 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ aus.

iv) Im nicht-relativistischen Fall ($z_c \to 1$) ist es zweckmässig, die Ruheenergie mc^2 von der Fermi-Energie abzuziehen: $f := z_c\varphi - 1$, womit $f(0) = z_c - 1$, $f(\xi_1) = 0$. Schreibe die Gl. (1) um auf $0 < f \ll 1$ und erhalte

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{df}{d\xi}\Big) = -(2f)^{3/2} \tag{6}$$

mit $f'(0) = 0$. Zeige, dass $f'(\xi_1) \propto \xi_1^{-5}$ und damit $MR^3 = \text{konst}\,.$

Hinweis: Mit $f(\xi)$ ist auch $a^4 f(a\xi)$, $(a > 0)$ eine Lösung (wieso?).

Quantitative Auswertung:

$$f_0'(1) = -16.55$$

für die Lösung mit $f_0(1) = 0$.