Quantenmechanik II. Übung 9.

FS 14 *Abgabe:* Di 6. Mai 2014

1. Fermi-Druck

i) In der Vorlesung wurde die Grundzustandsenergie

$$\frac{E_0}{V} = \frac{\hbar^2}{2m}(2j+1)\frac{1}{10\pi^2}k_{\mathrm{F}}^5$$

freier nicht-relativistischer Fermionen

$$\varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}\,, \qquad (\sigma = -j, \ldots, j)$$

mit Spin j berechnet. Es folgt, dass das Gas einen Druck

$$p = -\Big(\frac{\partial E_0}{\partial V}\Big)_N$$

ausübt. Berechne ihn.

ii) Berechne E_0/V und p für den Fall ultra-relativistischer Fermionen, $\varepsilon_{\vec{k},\sigma} = \hbar c|\vec{k}|$.

2. Weisser Zwerg, Teil 1

Ein weisser Zwerg ist ein Stern der über sukzessive Kernfusionen seinen Brennstoff aufgebraucht hat und fast nur noch aus C und O besteht. Er findet sein Gleichgewicht im energetischen Minimum zwischen der gravitationellen Energie der Kerne und der kinetischen Energie der Elektronen. Dort wirkt der Gravitationsdruck der Kerne dem Druck des Fermi-Gases der Elektronen entgegen.

Bemerkungen: 1) Seien m_0 (bzw. m) die Masse eines Kerns (bzw. Elektrons). Wegen $m_0 \gg m$ sind die Gravitationskräfte der Elektronen, bzw. der Druck der Kerne vernachlässigbar.

2) Die Coulomb-Wechselwirkung entfällt, da die Materie lokal neutral ist: Die Ladungsdichte der Kerne kompensiert die der Elektronen punktweise. Insbesondere: Ist N die Anzahl der Elektronen, so N/Z die der Kerne (Z Kernladungszahl).

3) Die kinetische Energie der Elektronen ist relativistisch: $\varepsilon(\vec{p}) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$.

i) Stelle die Thomas-Fermi Gleichung des Sterns auf und zwar gleich als Selbstkonsistenzbedingung zwischen dem Gravitationspotential $\phi(\vec{x})$ und der Dichte $n(\vec{x})$ der Elektronen. Anstelle der Dichte verwende jedoch den lokalen Fermi-Impuls $p_{\mathrm{F}}(\vec{x}) = \hbar k_{\mathrm{F}}(\vec{x})$,

$$n(\vec{x}) = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3}p_{\mathrm{F}}^3(\vec{x})\,. \tag{1}$$

Anders gesagt: Bestimme die Gleichung, die beim Übergang vom Atom zum Stern anstelle von

$$\frac{p_{\mathrm{F}}^2(\vec{x})}{2m} = (\mu - |e|\phi(\vec{x}))_+$$

($\phi(\vec{x})$: elektrisches Potential) tritt.

ii) Stelle die Poisson-Gleichung für $\phi(\vec{x})$ auf und eliminiere $\phi(\vec{x})$ aus beiden Gleichungen zugunsten von $p_{\mathrm{F}}(\vec{x})$.

iii) Spezialisiere die resultierende Gleichung auf den sphärisch symmetrischen Fall und versuche, sie auf dimensionslose Form zu bringen. Reskaliere dazu die radiale Variable $r = \lambda\xi$ mit passendem Parameter λ und verwende als Feldgrösse (im Wesentlichen) die lokale Fermi-Energie

$$\varphi(\xi) = z_c^{-1}\sqrt{1 + (p_{\mathrm{F}}(\vec{x})/mc)^2}\ ,$$

wobei z_c durch $\varphi(\xi = 0) = 1$ definiert ist. Der Parameter $1 < z_c < \infty$ beschreibt, wie relativistisch das Fermi-Gas im Mittelpunkt des Sterns ist ($z_c = 1$ nicht-relativistisch, $z_c = \infty$ ultra-relativistisch); er ersetzt μ oder N als Kenngrösse des Sterns. Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung für $\varphi(\xi) > z_c^{-1}$ in $\xi \geq 0$:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\Big) = -\Big(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\Big)^{3/2}$$

(Chandrasekhar-Gleichung).

Hinweis: Auf sphärisch symmetrische Funktionen angewandt ist $\Delta = r^{-2}(d/dr)r^2(d/dr)$.

Wie lautet die Randbedingung für $\varphi'(\xi = 0)$?