Quantenmechanik II. Übung 3.

FS14 *Abgabe:* Di 18. März 2014

1. Jeder Richtung ihr Spinor

Betrachte ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Der Spinor $|\vec{e}\rangle \in \mathbb{C}^2$, $(\langle\vec{e}|\vec{e}\rangle = 1)$, steht für einen Zustand, in welchem der Spin in Richtung $\vec{e} \in S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| = 1\}$ weist:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\ , \qquad (\vec{\sigma}\cdot\vec{e})|\vec{e}\rangle = (+1)|\vec{e}\rangle\ .$$

Der Spinor ist nur bis auf eine Phase bestimmt; hingegen ist

$$P(\vec{e}) = |\vec{e}\rangle\langle\vec{e}| = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{e}) \tag{1}$$

eindeutig. Die Richtungen $\vec{e}$ seien in sphärischen Koordinaten θ, φ dargestellt,

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\ , \qquad (0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi). \tag{2}$$

Beachte, dass Nord- und Südpol $\pm\vec{e}_3$, ($\theta = 0$, bzw. π), keine eindeutige Koordinate φ besitzen.

i) Bestimme die Komponenten von $|\vec{e}\rangle \in \mathbb{C}^2$. Verfahre wie folgt. Die Projektion

$$P(\vec{e})|\phi\rangle = |\vec{e}\rangle\langle\vec{e}|\phi\rangle \tag{3}$$

eines beliebigen Spinors $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$ kann als $|\vec{e}\rangle$ gewählt werden, nachdem sie auf 1 normiert wird. Dies setzt voraus, dass (3) nicht verschwindet. Man wähle $|\phi\rangle$ als den ersten der beiden Vektoren

$$|\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \qquad |-\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und überlege sich: Der so definierte Spinor $|\vec{e}\rangle \equiv |\vec{e}\rangle_+$ ist überall auf S^2 eindeutig definiert, ausser am Südpol $\vec{e} = -\vec{e}_3$. Wie steht es für die Wahl des zweiten Vektors und den entsprechenden Spinor $|\vec{e}\rangle_-$?

Hinweis: $\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$, $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

ii) Zeige: Es gibt keine Wahl $\vec{e} \mapsto |\vec{e}\rangle$, $(\langle\vec{e}|\vec{e}\rangle = 1)$, die überall auf $S^2 \ni \vec{e}$ definiert und stetig wäre.

Hinweis: Ansonsten würde gelten $|\vec{e}\rangle = \omega_\pm(\vec{e})|\vec{e}\rangle_\pm$ mit einer Phase $\omega_\pm(\vec{e}) \in \mathbb{C}$, $(|\omega_\pm(\vec{e})| = 1)$, und zwar immer dort wo $|\vec{e}\rangle_+$ bzw. $|\vec{e}\rangle_-$ definiert sind. Betrachte die Phase ${}_-\langle\vec{e}|\vec{e}\rangle_+$ und ihre Windung, wenn $\vec{e}$ um den Äquator läuft. Schliesse mit einem Widerspruch.

iii) Zeige umgekehrt, dass jeder Spinor $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$, $(\langle\phi|\phi\rangle = 1)$, zu einer Richtung gehört: $|\phi\rangle = |\vec{e}\rangle$.

Hinweis: Löse (1) für $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ nach $\vec{e}$. Was ist die allgemeine, explizite Form einer komplexen 2×2-Matrix A mit $A^* = A$ und $\operatorname{tr} A = 0$?

2. Der quantenmechanische Kreisel

Der klassische freie Kreisel hat die Energie

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{L_i^2}{2\theta_i} \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i L_i^2 \tag{4}$$

wobei $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ die Komponenten des Drehimpulses im (körperfesten) Hauptachsensystem und θ_i die Hauptträgheitsmomente sind. Quantenmechanisch ist H der Hamiltonoperator und $\vec{L}$ faktisch der Drehimpulsoperator einer irreduziblen Darstellung $\mathcal{D}_l$.

Hintergrund (erlässlich): Klassisch ist eine Konfiguration des Kreisels eine Drehung $S \in \mathrm{SO}(3)$, wie sie in der Beziehung $\vec{x} = S\vec{y}$ zwischen raumfesten ($\vec{x}$) und körperfesten ($\vec{y}$) Koordinaten der Massenpunkte besteht. Eine Drehung $R \in \mathrm{SO}(3)$ des Kreisels bewirkt $S \mapsto RS$. Quantenmechanisch ist der Hilbertraum $L^2(\mathrm{SO}(3))$, wobei "$\psi(S)$ quadratintegrierbar" auf das rotationsinvariante Mass auf $\mathrm{SO}(3)$ bezogen ist. Er trägt eine Darstellung der $\mathrm{SO}(3)$, und zwar $(U(R)\psi)(S) = \psi(R^{-1}S)$. Sie zerfällt in irreduzible Darstellungen $\mathcal{D}_l$, $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, wobei jede mit Vielfachheit gleich ihrer Dimension, $2l + 1$, vorkommt. Der Hamiltonoperator ist (4), wobei $\vec{L}$ der Drehimpulsoperator der Darstellung U ist.

Aufgabe ist es, die Eigenwerte von H in einem Teilraum $\mathcal{D}_2$ zu finden. Die Normalbasis dafür sei $|m\rangle := |2, m\rangle$, $(m = -2, \ldots, 2)$.

i) Zeige: $\langle m'|H|m\rangle \neq 0$ nur für $m' - m = 0, \pm 2$. Zerlege damit $\mathcal{D}_2 = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$ in zwei Teilräume, die unter H invariant sind.

Hinweis: Drücke L_i durch L_3, $L_\pm$ aus und erhalte

$$H = (a_1 + a_2)\frac{\vec{L}^2 - L_3^2}{2} + (a_1 - a_2)\frac{L_+^2 + L_-^2}{4} + a_3 L_3^2 \,.$$

ii) Sei $U \colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ definiert durch $U|m\rangle = |-m\rangle$. Zeige, dass U eine Symmetrie von H ist, also $[H, U] = 0$, und finde damit je zwei H-invariante Teilräume von $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}''$.

Hinweis: Zeige $L_+ U = U L_-$.

iii) Berechne die Matrixelemente von H in diesen Teilräumen und finde die jeweiligen Eigenwerte.

Hinweis: Das Ergebnis in Einheiten von $\hbar^2$ ist

$$\begin{aligned} &2(a_1 + a_2 + a_3) \pm 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_1 a_3 - a_2 a_3}\,, \\ &a_1 + a_2 + 4a_3\,, \qquad a_1 + 4a_2 + a_3\,, \qquad 4a_1 + a_2 + a_3\,. \end{aligned} \tag{5}$$

iv) Im Fall des symmetrischen Kreisels, $a_1 = a_2$, können die Eigenwerte einfacher berechnet werden. Verifiziere ihre Übereinstimmung mit (5).