Theoretische Physik, Übung 8.

FS13 *Abgabe: 23.04.13*

1. Dopplerverschiebung und Aberration

(a) Das Feld $\varphi(\vec{x}, t)$ sei ein Skalarfeld unter Lorentztransformationen $x' = \Lambda x$, d.h. $\varphi'(x') = \varphi(\Lambda^{-1} x')$. Zeige, dass bei einer Welle $\varphi(\vec{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ Frequenz und Wellenvektor einen 4er-Vektor $k \equiv (\omega/c, \vec{k})$ bilden.

Seien im Folgenden K und K' durch einen Boost $\Lambda = \Lambda(v\vec{e}_1)$ in 1-Richtung verbunden. Betrachte Licht der Fortpflanzungsrichtung $\vec{e}$ und der Frequenz ω bzgl. K.

(b) Sei $\vec{e} = \vec{e}_1$. Berechne die Frequenz bzgl. K' (*Dopplerverschiebung*).

(c) Sei $\vec{e} = \vec{e}_2$. Bestimme den Winkel $\alpha(v)$ des Wellenvektors mit der 2-Achse bzgl. K' (*Aberration*).

2. Transformation der Geschwindigkeiten

Gegeben sind zwei achsenparallele Inertialsysteme O und $\widetilde{O}$, wobei sich $\widetilde{O}$ mit Relativgeschwindigkeit v bezgl. O in 1-Richtung bewegt. Ein Teilchen hat Geschwindigkeit $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ bzgl. O. Berechne die Geschwindigkeitskomponenten bzgl. $\widetilde{O}$? *Hinweis:* Drücke die Geschwindigkeit durch die 4er-Geschwindigkeit aus.

3. Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Eine Punktladung e bewegt sich auf der Trägheitsbahn $\vec{x} = \vec{v}t$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Berechne die Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$. In welchen Richtungen ist $\vec{E}(\vec{x}, t = 0)$ am stärksten, bzw. schwächsten bei gleichem $|\vec{x}|$?

4. Dualer Feldtensor

Definiere den dualen Feldtensor

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1}$$

und den dualen Strom

$$\mathcal{J}_{\nu\rho\sigma} = j^{\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,,$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{0123} = +1$ ist (Parität der Permutation $(0123) \mapsto (\mu\nu\rho\sigma)$).

Bemerkung: Dualität ist hier nicht im Sinne des Dualraums, sondern der Hodge-Dualität, s. Anhang B, zu verstehen (unwesentlich für diese Aufgabe). Daraus folgt, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{J}$ Tensoren sind; alternativ auch aus Übung 1.2, wonach $|g|^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, $(g = \det(g_{\mu\nu}))$ ein Tensor unter beliebigen Koordinatentransformationen ist (bzw. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentz-Transformationen).

i) Drücke die Tensorkomponenten $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Die Dualität erweist sich als eine elektrisch-magnetische.

ii) Zeige: Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0\,,$$
$$\mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = -\frac{1}{c}\mathcal{J}_{\rho\sigma\mu}\,.$$

Hinweis: Zeige

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = F^{\alpha\nu}{}_{,\alpha}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{2}$$

In der $(\vec{E},\,\vec{B})$-Notation gehen die linken Seiten der homogenen und inhomogenen Maxwell-Gleichungen auseinander hervor unter $(\vec{E},\,\vec{B}) \rightsquigarrow (-\vec{B},\,\vec{E})$. Obige Gleichungen bringen diese Symmetrie in relativistischer Notation zum Ausdruck.