# Theoretische Physik, Übung 7.

*FS13* *Abgabe: 16.04.13*

## 1. Anwendungen von Lorentz-Transformationen

(a) *Zeitdilatation.* Zwei Ereignisse $A$, $B$ finden im Inertialsystem $K$ am selben Ort statt (z.B. Zeitangaben einer bzgl. $K$ ruhenden Uhr). Zeige mit Hilfe eines Boosts, dass in einem zu $K$ bewegten Inertialsystem $K'$ die Zeitdifferenz grösser ist.

(b) *Längenkontraktion.* Betrachte einen Stab, der in seinem Ruhesystem $K$ die Länge $L$ hat. Zeige, dass die Länge des Stabs in einem longitudinal dazu bewegten Inertialsystem $K'$ kleiner ist. *Hinweis:* Die Länge ergibt sich aus der Koordinatendifferenz der Endpunkte des Stabs zur selben Zeit.

(c) Gegeben sind zwei achsenparallele Inertialsysteme $K$ und $K'$, wobei sich $K'$ mit Relativgeschwindigkeit $v$ bezgl. $K$ in 1-Richtung bewegt. Der Stab ist wieder in 1-Richtung ausgerichtet, bewegt sich nun aber mit Geschwindigkeit $w$ in 2-Richtung. Bestimme seinen Winkel $\theta$ zur 1-Richtung bzgl. $K'$.

(d) Ein 4er-Vektor $\xi$ heisst *zeitartig* falls $(\xi, \xi) > 0$ und *raumartig* falls $(\xi, \xi) < 0$. Zeige: zwei Ereignisse $x, y$ sind genau dann gleichzeitig in einem passenden Inertialsystem, falls $x - y$ raumartig ist. Sie finden genau dann in einem passenden Inertialsystem am selben Ort statt, falls $x - y$ zeitartig ist.

## 2. Lorentz-Transformationen auf der Himmelskugel

Die Lage der Sterne auf der Himmelskugel ist die Richtung, aus der ihr Licht kommt. Das Licht eines Sterns kommt bzgl. zweier Inertialsysteme aus verschiedenenen Richtungen, weil diese zueinander gedreht oder aber bewegt sind. Somit sehen die beiden Beobachter den Sternenhimmel anders. Zeige: Die Transformation ist Möbius.

Eine Transformation der erweiterten komplexen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heisst Möbius, falls sie von der Form ist

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C}),$$

mit $ad - bc \neq 0$. Die Zusammensetzung von Möbius-Transformationen entspricht dem Produkt der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zwei Matrizen $A$, $B$ definieren die selbe Transformation, genau dann falls $B = \lambda A$, $\lambda \neq 0$. Die Normierung $\det A = 1$ lässt noch die Wahl $\lambda = \pm 1$ offen. Die Möbius-Gruppe ist deshalb $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$.

Die Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kann mittels der stereographischen Projektion als die Riemann-Kugel $S^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\vec{v}| = 1\}$ aufgefasst werden. In beiden Beschreibungen (Ebene oder Kugel) ist eine Transformation genau dann Möbius, falls sie kreis- und orientierungstreu ist.

Zeige, dass eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in L_+^\uparrow$ eine Möbius-Transformation $\pm A$ auf der $S^2$ induziert, wenn diese als die Himmelskugel der Richtungen des Lichts aufgefasst wird. Beachte dazu, dass Lorentz-Transformationen durch die folgenden Eigenschaften characterisiert sind:

i) Forminvarianz des Trägheitsgesetzes

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{v}t \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}^{\,\prime} = \vec{b}^{\,\prime} + \vec{v}^{\,\prime} t' \, ;$$

ii) Invarianz der Lichtgeschwindigkeit ($c = 1$)

$$|\vec{v}| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{v}^{\,\prime}| = 1 \, .$$

Betrachte die Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}^{\,\prime}$, die durch $\Lambda$ auf die Geschwindigkeiten induziert wird. Zeige mittels (i), dass $S$ geradentreu ist, obschon $S$ im Gegensatz zu $\Lambda : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ nicht linear ist. *Hinweis:* Was bedeutet die Eigenschaft "die Punkte $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ liegen auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$" anhand von Trägheitsbahnen im $\mathbb{R}^{1+3}$?

Anhand von (ii) schliesse, dass $S$ Kreise auf $S^2$ auf ebensolche abbildet. *Hinweis:* Was ist ein solcher Kreis in Bezug auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$?

Das Ergebnis lässt sich zusammenfassen im Isomorphismus

$$L_+^\uparrow \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \, .$$

**3. Rechnen mit Tensoren**

In der Basis $e_1, e_2$ für einen 2-dimensionalen Vektorraum sei eine Metrik gegeben durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \, .$$

Der Tensor $T$ vom Typ $\binom{0}{2}$ sei definiert durch $T(a, b) = 2a^1 b^2$, wobei $(a^\mu)$ und $(b^\mu)$ die komponenten der Vektoren $a$ und $b$ bezüglich der Basis $(e_\mu)$ sind.

(a) Bestimme die Matrizen $(T_{\mu\nu}), (T_\mu{}^\nu), (T^\mu{}_\nu), (T^{\mu\nu})$. Was ist die Spur von $T$?

(b) Betrachte die Basistransformation $\bar{e}_1 = e_1 + 2e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$. Bestimme die Transformationsmatrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$, $\Lambda_\mu{}^\nu$, sowie die transformierten Komponenten $\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{T}^{\mu\nu}$.