Theoretische Physik, Übung 4.

FS13 *Abgabe: 19.03.13*

1. Elektrostatische Energie im äusseren Feld

Zeige, dass die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in einem langsam variierenden äusseren Potential $\varphi(\vec{x})$ wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$W = e\varphi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots , \tag{1}$$

wobei $e = \int d^3x\, \rho(\vec{x})$ die Gesamtladung ist, $\vec{p} = \int d^3x\, \vec{x}\rho(\vec{x})$ das Dipolmoment und $Q_{ij} = \int d^3x\, (3x_i x_j - \vec{x}^2 \delta_{ij})\rho(\vec{x})$ das Quadrupolmoment.

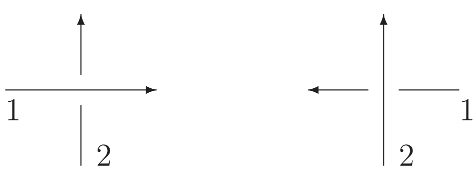
Hinweis: Entwickle das Potential φ in $W = \int d^3x \rho(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ nach Taylor um $\vec{x} = 0$.

2. Gausssche Verkettungszahl

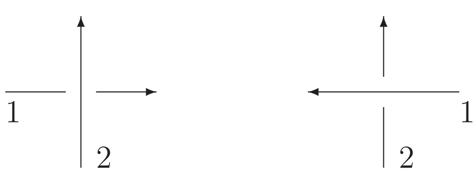
Die Gausssche Verkettungszahl zweier geschlossener Kurven γ_1, γ_2 ist definiert als

$$n(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} \frac{(d\vec{s}_2 \wedge d\vec{s}_1) \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

mit derselben Bedeutung von $\vec{r}$ wie in (2.1). Zeige: $n(\gamma_1, \gamma_2)$ ist eine ganze Zahl, die angibt, wie oft sich die eine Kurve um die andere windet ($n(\gamma_1, \gamma_2) = n(\gamma_2, \gamma_1)$). Genauer: Projiziere die beiden Kurven auf eine Ebene; seien



positive



negative

Kreuzungen.

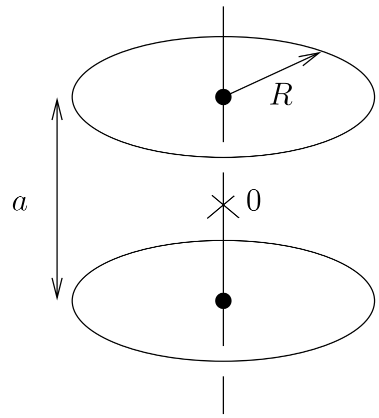
Dann ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = (n_+ - n_-)/2$, wobei $n_\pm$ die Anzahl positiver/negativer Kreuzungen ist.

Hinweis: Mit $I_1 = I_2 = c = 1$ ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$. Verwende den Satz von Stokes um zu zeigen, dass dies eine Invariante unter Deformationen ist.

3. Helmholtz-Spule

i) Ein kreisförmiger Leiter mit dem Radius R werde vom Strom I durchflossen. Welches sind die Symmetrien des Magnetfelds? Bestimme dann das Feld auf der Symmetrieachse des Leiters (oEdA die 3-Achse).

Eine Helmholtz-Spule besteht aus zwei kreisförmigen Leitern, die eine gemeinsame Symmetrieachse haben. Die beiden Ströme seien gleich und gleich orientiert. Die Anordnung



bezweckt ein Magnetfeld, das über ein gewisses Gebiet fast konstant ist. Konkret: Wie muss der Abstand a gewählt werden, damit $\vec{B}(\vec{x}) - \vec{B}(0) = O(|\vec{x}|^4)$, $(\vec{x} \to 0)$?

ii) Zeige: Dies tritt ein, sofern
$$\frac{\partial^2 B_3}{\partial x_3^2} = 0 \tag{2}$$
am Mittelpunkt. *Hinweis:* Verwende die Symmetrien des Felds und seine Feldgleichungen, ohne Festlegung von a.

iii) Bestimme a, sodass (2) gilt.