Theoretische Physik, Übung 3.

FS13 *Abgabe: 12.03.13*

1. Das Cavendish Experiment

Das Cavendish Experiment (1773) ist ein Test des Coulomb-Gesetzes. Zwei konzentrische, leitende, hohle Kugeln der Radien $R_1 < R_2$ sind über einen Draht verbunden und gegen aussen isoliert. Die Ladungen der beiden Kugeln seien Q_1, bzw. Q_2.

i) Ohne viel zu rechnen zeige, dass $Q_1 = 0$.

Ersetze nun das Coulomb-Gesetz durch

$$\vec{F}_{12} = e_1 e_2 F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

mit einem beliebigen Kraftgesetz $F(r)$.

ii) Zeige: Das Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius a und Ladung 1 ist

$$V(r) = \frac{f(r+a) - f(|r-a|)}{2ar}, \qquad (r = |\vec{x}|)$$

wobei

$$f(r) = \int_0^r ds\, U(s) s\,, \qquad \frac{dU}{dr} = -F(r)\,.$$

Das Potential U ist bestimmt bis auf $U(r) \to U(r) + C$, ($C = \text{const}$). Wie wirkt sich das auf f aus? Was ist f im Fall des Coulomb-Gesetzes?

iii) Berechne das Verhältnis des Ladungen,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{f(2R_2)R_1 - (f(R_2 + R_1) - f(R_2 - R_1))R_2}{f(2R_1)R_2 - (f(R_2 + R_1) - f(R_2 - R_1))R_1}\,, \tag{1}$$

und zeige, dass nur im Fall des Coulomb-Gesetzes $Q_1 = 0$ für alle Radien gilt.

2. Der Satz von Thomson

Hält man mehrere Körper mit jeweils vorgegebener Gesamtladung fest, so nimmt die elektrostatische Energie ein Minimum an, wenn die Ladungen so verteilt sind, dass auf jedem von ihnen – wie im Falle von Leitern – das Potential konstant ist. Insbesondere befindet sich dann in ihrem Inneren keine Ladung.

Hinweis: Drücke die Energie durch die Ladungsverteilung aus.

3. Eine Greensche Funktion in Dimension 2

Finde die Greensche Funktion für das Potentialproblem auf der Scheibe $D = \{|\vec{x}| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeige damit, dass eine harmonische Funktion $\varphi(\vec{x})$ auf D wie folgt durch ihre Randwerte bestimmt ist:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(1,\theta')\, \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \theta')}\, d\theta' \tag{2}$$

(r, θ: Polarkoordinaten für $\vec{x}$).

Hinweis: Verwende, dass auch hier für $\vec{x} \in \partial D$ (1.28) gilt.

4. Numerische Lösung eines Randwertproblems mit Matlab

Die Software Matlab implementiert die Methode der Finiten Elemente zur Lösung 2-dimensionaler Randwertprobleme.

Vorgehen: (i) Starten Sie *Matlab*; (ii) geben Sie den Befehl *pdetool* ein: ein Fenster *PDE Toolbox* öffnet sich; (iii) wählen Sie *Electrostatics* in der Menuleiste (statt *Generic Scalar*) ; (iv) unter *PDE/PDE Specification* können Sie die Werte der Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ eingeben; (v) mit *Draw* zeichnen Sie das Gebiet, evtl. unter Benützung eines Koordinatennetzes (s. *Options*); (vi) mit *Boundary/Boundary Mode* und *Boundary/Specify Boundary Conditions* legen Sie die Randbedingungen fest (Randwerte heissen $r(\vec{x})$ statt $\psi(\vec{x})$); (vii) mit *Mesh* triangulieren Sie das Gebiet, bzw. verfeinern Sie die Triangulation; (viii) unter *Plot/Parameters* können Sie den Darstellungsmodus der Lösung wählen; (ix) ein Klick auf = löst nun das Randwertproblem.

Eine Anleitung zu *PDE Toolbox* findet man unter
`http://www.mathworks.ch/ch/help/pde/index.html`

Finden Sie damit das elektrische Feld und das Potential einer Anordnung Ihrer Wahl.