Theoretische Physik, Übung 13.

FS13 *Abgabe: 28.05.13*

1. Ein halber harmonischer Oszillator

Betrachte ein Teilchen in einer Dimension und im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty \,, & (x < 0) \,, \\ \frac{1}{2}x^2 \,, & (x > 0) \,. \end{cases}$$

Finde Eigenwerte und Eigenfunktionen des entsprechenden Hamiltonoperators in Einheiten $m = \hbar = 1$.

Hinweis: Der divergente Teil des Potentials kann durch eine Randbedingung $\psi(x = 0) = 0$ für die Wellenfunktion auf $x \geq 0$ ersetzt werden, vgl. Aufgabe 11.2.

2. Energie-Zeit Unschärferelation

In scheinbarer Ähnlichkeit zur Ort-Impuls Unschärferelation, $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$, findet man in der Literatur die Behauptung

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \,. \tag{1}$$

Ihre Deutung ist dadurch erschwert, dass es in der Quantenmechanik keine Observable "Zeit" gibt. Hier sind zwei mögliche Deutungen (beide Mandelshtam, Tamm 1945).

i) Der Erwartungswert einer Observablen A ändert sich mit der Rate $\dot{A} := d\langle A\rangle_{\psi_t}/dt$. Die Zeit t (so die Interpretation) ist die, bei der A einen bestimmten Wert über- oder unterschreitet. Da die Messung von A einer Schwankung ΔA unterliegt, ist

$$\Delta t := \frac{\Delta A}{|\dot{A}|} \,.$$

Zeige (1). *Hinweis:* Verwende die Bewegungsgleichung im Heisenberg-Bild,

$$\dot{A}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H, A(t)] \,. \tag{2}$$

ii) Ein Zustand $|\psi_0\rangle$ entwickelt sich gemäss der Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle \,. \tag{3}$$

Sei $t_0 > 0$ eine Zeit, die $|\psi_t\rangle$ mit Sicherheit vom Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ unterscheidbar macht:

$$\langle\psi_0|\psi_{t_0}\rangle = 0 \,.$$

Zeige:

$$\Delta E \cdot t_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \,.$$

Hinweise: Schätze $|\dot{f}(t)|$ ab für $f(t) = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2$. Die Rechnung führt auf $\langle\psi_t|[P, H]|\psi_t\rangle$ mit $P = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$; verwende dafür die Unschärferelation (9.24). Benutze schliesslich den Vergleich

$$\dot{f}(t) \geq g(f(t)),\ \dot{f}_0(t) = g(f_0(t)),\ f(0) = f_0(0) \quad \Longrightarrow \quad f(t) \geq f_0(t),\ (t \geq 0) \,. \tag{4}$$

iii) Umgekehrt hat Deutung (ii) ein Gegenstück für Ort und Impuls, z.B. in Dimension 1: Sei $|\psi_x\rangle$ der um x verschobene Zustand $|\psi_0\rangle$ und x_0 so, dass $\langle\psi_0|\psi_{x_0}\rangle = 0$. Zeige:

$$\Delta p \cdot x_0 \geq \hbar \cdot \frac{\pi}{2} \, .$$

Hinweis: Wähle H passend in Gl. (3).