# Theoretische Physik, Übung 11.

*FS13* *Abgabe: 12.05.13*

## 1. Rechnen mit Kommutatoren

i) Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen oder Operatoren $A, B$ ist linear in $A, B$ und antisymmetrisch: $[B, A] = -[A, B]$. Zeige die Produktregel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

und die Jacobi-Identität,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \ .$$

ii) Ausgehend von $(\mathrm{i}/\hbar)[P, X] = 1$ zeige, dass für Polynome $f(x), g(p)$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[P, f(X)] = f'(X) \ , \qquad \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[g(P), X] = g'(P)$$

gilt, wobei $f(X), g(P)$ über Summen und Produkte von Matrizen definiert sind.

iii) Leite die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses $\vec{L}$ her: Zeige, dass die Komponenten $L_i = X_{i+1}P_{i+2} - X_{i+2}P_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3 \mod 3)$ den Vertauschungsrelationen

$$[L_{i+1}, L_{i+2}] = \mathrm{i}\hbar L_i$$

genügen. *Hinweis:* $(\mathrm{i}/\hbar)[P_i, X_j] = \delta_{ij}$.

Zeige, dass der Erwartungswert der Komponenten $L_1$ und $L_2$ in jedem Eigenzustand von $L_3$ verschwindet.

## 2. Teilchen im Potentialtopf

Betrachte einen ein-dimensionalen, $\infty$-tiefen Potentialtopf der Breite $a$, dargestellt als das Intervall $0 \leq x \leq a$. Die Energie eines Teilchens darin entspricht dem Hamiltonoperator $H$ auf $\mathcal{H} = L^2([0, a])$:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} \ , \qquad (\psi(0) = \psi(a) = 0) \ ,$$

wobei die Randbedingungen den Definitionsbereich des Operators festlegen.

Das Teilchen befinde sich im Eigenzustand tiefster Energie (Grundzustand) des Topfs der Breite $a/2$. Zu einer bestimmten Zeit werde die rechte Wand plötzlich von $x = a/2$ nach $x = a$ verschoben.

i) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass danach das Teilchen im ersten angeregten Zustand, bzw. im Grundzustand des Potentialtopfs der Breite $a$ ist.

*Hinweis:* Der Zustand ist unmittelbar nach der Verschiebung noch derselbe.

ii) Bleibt der Erwartungswert der Energie des Teilchens bei der plötzlichen Änderung erhalten? Berechne auch das Schwankungsquadrat der Energie.