Übungsserie 7

Abgabe: 27. April 2012

Aufgabe 1 [*Poissonklammer*]: Auf dem Raum der Funktionen des Phasenraums ist die Poissonklammer durch

$$\{F,G\} = \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} \right)$$

definiert.

(a) Zeige, dass die Poissonklammer die Jacobi-Identität erfüllt

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_1\}\} = 0\,.$$

(b) Wie in der Vorlesung besprochen, gilt für ein autonomes System (für das die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt)

$$\frac{d}{dt} F(q(t), p(t)) = \{H, F\}\,.$$

Falls F und G Erhaltungsgrössen sind, zeige, dass dann auch die Poissonklammer $\{F, G\}$ eine Erhaltungsgrösse definiert.

(c) Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist durch $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ gegeben, wobei die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ ein Orthogonalsystem definieren. Falls $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_2$ erhalten sind, zeige, dass dann auch $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3$ erhalten ist.

Aufgabe 2 [*Ehrenfest'sches Theorem*]: Beweise das Ehrenfest'sche Theorem

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -\langle V'(x) \rangle\ ,$$

wobei

$$\langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\ x\, |\Psi(x,t)|^2$$

der Erwartungswert des Ortes und

$$\langle V'(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\ \Psi(x,t)^*\, V'(x)\, \Psi(x,t)$$

der Erwartungswert der Ortsableitung $V'(x)$ des Potentials $V(x)$ ist.

Aufgabe 3 [*Wahrscheinlichkeitsstrom*]: Zeige, dass

$$\Psi_k(x,t) = \left(A e^{\frac{ikx}{\hbar}} + B e^{-\frac{ikx}{\hbar}} \right) e^{-\frac{iE_k}{\hbar} t}\ ,$$

eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung mit $V(x) = 0$ ist, wobei A, B, k Konstanten sind, und E_k durch $E_k = \frac{k^2}{2m}$ definiert ist. Zeige weiter, dass der zu $\Psi_k(x,t)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsstrom durch

$$j(x,t) = \left(|A|^2 - |B|^2 \right) \frac{k}{m}$$

gegeben ist.