Übung 1. *Wellenfunktionen-Quiz*

(a) Welche der folgenden Wellenfunktionen sind möglich, und warum?

(1) Im Grundzustand eines Heliumatoms besitzen beide Elektronen die räumliche Wellenfunktion $\psi(r,\theta,\phi)$.

(2) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |{\downarrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2 \tag{1}$$

(3) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) \otimes |{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\downarrow}\rangle_2 - g(r_1)f(r_2) \otimes |{\downarrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2) \tag{2}$$

(4) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2 \tag{3}$$

(5) Drei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2)h(r_3) - f(r_2)g(r_3)h(r_1) + f(r_3)g(r_1)h(r_2)) \otimes |{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2 \otimes |{\uparrow}\rangle_3 \tag{4}$$

(b) Wie viele Konfigurationen gibt es bei drei möglichen Zuständen χ_1,χ_2,χ_3 und drei Teilchen, wenn

(1) die Teilchen unterscheidbar sind

(2) die Teilchen ununterscheidbare Bosonen sind

(3) die Teilchen ununterscheidbare Fermionen sind? Gib für diesen Fall die Gesamtwellenfunktion an.

Übung 2. *Grundzustands-Energien*

Sei P der Vertauschungsoperator für zwei Teilchen. Zeige, dass

(a) Wenn $PQP = W$, dann $PQ^2P = W^2$

(b) Wenn $[P,H] = 0$, dann sind nicht-entartete Eigenzustände von H auch Eigenzustände von P.

(c) Wenn $[P,H] = 0$ dann $\langle + | H | - \rangle = 0$, wobei $P|+\rangle = |+\rangle$, $P|-\rangle = -|-\rangle$.

(d) $Px_1P = x_2$

(e) $Pp_1P = p_2$

(f) $PV(x_1,x_2)P = V(x_2,x_1)$

(g) $[P,K] = 0$, wobei $K = p_1^2/2m + p_2^2/2m$

(h) Wenn $V(x_1,x_2) = V(x_2,x_1)$ dann gilt $[P,H] = 0$.

Übung 3. ***Spin und Permutationssymmetrie***

Unter den irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_N gibt es nur zwei, die 1-dimensional sind: Die symmetrische und die antisymmetrische. Ein Hilbertraum K, der eine unitäre Darstellung P_σ, $(\sigma \in S_N)$ trägt, zerfällt in (möglicherweise triviale) invariante Unterräume, worin bis auf Wiederholungen nur je eine irreduzible Darstellung vorkommt.

Jeder irreduziblen Darstellung entspricht so ein orthogonaler Projektor in K, insbesondere S der symmetrischen und A der antisymmetrischen (vgl. Vorlesung).

(a) Für $N = 2$ gibt es keine weiteren irreduziblen Darstellung ausser den beiden namentlich erwähnten. Zeige dies durch $S + A = 1$.
Ohne Beweis: Fur $N = 3$ gibt es genau eine weitere, gemischt symmetrische irreduzible Darstellung. Sei G der entsprechende orthogonale Projektor. Drücke S, A, G durch die Operatoren P aus.

Hinweis: $S + A + G = 1$.

Sei nun $H = \mathbb{C}^2$ der Hilbertraum eines Spin $\frac{1}{2}$-Teilchens $(\hbar = 1)$, und $K = \otimes^N H$ der von N unterscheidbaren. Unter dem Spin versteht man eine darin vorkommende irreduzible Darstellung der SU(2); unter der Permutationssymmetrie eine der S_N. In den folgenden Beispielen soll gezeigt werden, dass sich die beiden entsprechen (Schur-Weyl-Dualität).

(b) Sei $N = 2$. Eigenwerte des Gesamtspins $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ sind $s(s + 1)$ mit $s = 0, 1$ und Eigenprojektoren $P(s)$. Zeige die Entsprechung

$$P(1) = S, \quad P(0) = A \tag{5}$$

und daraus

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = 1 + P_{(12)}. \tag{6}$$

(c) Sei $N = 3$. Die Werte s des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ sind $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (wieso?). Man überlege sich, dass $A = 0$ und $S, G \neq 0$.

Zeige die Entsprechung in der Form

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = S, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = G. \tag{7}$$

Hinweis: Schreibe $\vec{S}^2$ einmal mit Hilfe von $(\vec{S}_{i+1} + \vec{S}_{i+2})^2$, $(i = 1, 2, 3)$ und (3), das andere mal als Spektralzerlegung nach den Projektoren $P(s)$.

Übung 4. ***Vertauschung identischer Teilchen***

Dass Teilchen mit halbzahligem Spin antisymmetrische Wellenfunktionen besitzen, Teilchen mit ganzzahligem Spin hingegen symmetrische, lässt sich letztenendes im Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie zeigen. In dieser Aufgabe wollen wir jedoch einen Ansatz betrachten, mit Hilfe dessen sich das Ergebnis anschaulich darstellen lässt. Dazu betrachten wir die Vertauschung der Teilchen durch Rotation um π um das Zentrum zwischen den beiden Teilchen, generiert durch den Drehimpulsoperator J:

Betrachte die Wirkung des unitären Operators $U(\pi) = e^{-i\pi J_z} = e^{-i\pi L_z} e^{-i\pi S_z}$ auf die Wellenfunktion $\psi(x, x')$ zweier identischer Teilchen, und zeige, dass man dadurch eine Phase erhält, die entsprechend des Spins der Teilchen ein gerades oder ungerades Vielfaches von π enthält.