Übung 1. *Das Jaynes-Cummings-Modell*

Die Wechselwirkung eines Atoms mit dem quantisierten Strahlungsfeld kann beschrieben werden durch den Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= H_G + H_K \;, \qquad H_G = H_{AT} + H_{SF} \;, \\ H_{AT} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2m_k}\vec{p}_k^{\,2} + U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \\ H_{SF} &= \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} \;, \end{aligned} \tag{1}$$

wo H_{AT} der Hamiltonoperator des ungestörten Atoms mit N Elektronen und H_{SF} der des freien Strahlungsfeldes ist. Bei letzterem wurde die divergente Nullpunktsenergie weggelassen. H_K beschreibt die Kopplung der beiden Systeme. Nutzen wir die Dipolnährung mit dem Dipolmoment $-e\vec{r}$ des Atoms und betrachten linear polarisierte Strahlung, lässt sich H_K schreiben als

$$\begin{aligned} H_K &= -\frac{e}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\vec{k}}}} \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\lambda} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \right) = \frac{e}{c}\vec{A}(0) \cdot \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big[H_{AT}, \vec{r}\,\big] \;, \\ \vec{A}(0) &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \right) \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \;. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Behandlung der Übergangsraten verwendete ein Quantisierungsvolumen als Hilfsmittel, dessen Volumen sehr groß gewählt wurde. Der spontane Zerfall eines angeregten Atoms ist irreversibel im Einklang mit der Tatsache, dass das ausgesandte Photon ins räumlich Unendliche entweicht. Eine andere Physik eröffnet sich, falls das Volumen einer realen Kavität entspricht, deren Abmessungen mit der Wellenlänge jenes Photons vergleichbar sind. Das Interesse gilt einem Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen $|g\rangle$ und $|a\rangle$ mit Bohrscher Frequenz ω_0; die Kavität besitze eine einzige Mode $(\vec{k}, \lambda)$, deren Frequenz ω nahe bei ω_0 liegt. Unter Beibehaltung dieser beiden Zuständen und dieser einen Mode alleine wird aus (2)

$$H_{AT} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 \;, \qquad H_{SF} = \hbar\omega a^\dagger a \;, \qquad H_K = \hbar(a + a^\dagger)(g\sigma_+ + \bar{g}\sigma_-) \;, \tag{3}$$

auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$. Dabei beziehen sich

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;, \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

auf die Basis $|a\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $|g\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $\mathbb{C}^2$; ferner sind a, $a^\dagger$ Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf $\mathcal{H}$, dem Hilbertraum eines harmonischen Oszillators aufgespannt durch die Zustände $|n\rangle$ bestimmter Photonenzahl $n = 0, 1, \ldots$.

(a) Führe die Kopplung $g \in \mathbb{C}$ auf Grössen in (2) zurück. Zeige, dass $g \geq 0$ erzielt werden kann durch Wahl der relativen Phase zwischen $|a\rangle$ und $|g\rangle$.

Lösung. Mit $|g\rangle, |a\rangle \in \mathbb{C}^2$ und $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ folgt aus Gl. (2) unter Beibehaltung der ausgezeichneten Mode $(\vec{k}, \lambda)$

$$\langle a\otimes\varphi|H_K|g\otimes\psi\rangle = \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\langle\varphi|\vec{A}(0)|\psi\rangle\langle a|\big[H_{AT}, \vec{r}\big]|g\rangle = ie\sqrt{\frac{2\pi}{L^3\hbar\omega_{\vec{k}}}}\langle\varphi|a_{\vec{k},\lambda} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}|\psi\rangle\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\hbar(\omega_a - \omega_g)\langle a|\vec{r}|g\rangle\ , \tag{L.1}$$

nach (3) hingegen

$$\langle a\otimes\varphi|H_K|g\otimes\psi\rangle = \hbar g\langle\varphi|a + a^\dagger|\psi\rangle\ . \tag{L.2}$$

Der Vergleich liefert ($\omega = \omega_{\vec{k}}$, $a = a_{\vec{k},\lambda}$, $\omega_0 = \omega_a - \omega_g$)

$$g = \mathrm{i}e\omega_0\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_{\vec{k}}L^3}}\vec{e}_{\vec{k},\lambda}\cdot\langle a|\vec{r}|g\rangle\ . \tag{L.3}$$

Die Matrixelemente $\langle a\otimes\varphi|H_K|a\otimes\psi\rangle$ verschwinden in beiden Fällen. Unter der Ersetzung $|g\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|g\rangle$, $|a\rangle \to |a\rangle$ ist $g \to g\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, wodurch $g \geq 0$ erzielt werden kann.

(b) Aufgrund der Diskussionen in der Vorlesung können wir die Physik von H_{AT} und H_{ST} als gut verstanden betrachten und uns auf die von H_K konzentrieren. Dazu berechne zunächst $\tilde{H}_K(t)$ im Wechselwirkungsbild von H_G und zeige damit, dass $a^\dagger\sigma_+$ und $a\sigma_-$ zu Termen führen, die rasch oszillieren verglichen mit jenen, die von $a\sigma_+$ und $a^\dagger\sigma_-$ stammen. Sie dürfen vernachlässigt werden (Approximation der rotierenden Welle).

Hinweis. $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$.

Lösung. Im Wechselwirkungsbild ist ein Operator B dargestellt durch $\tilde{B}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_G t/\hbar}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_G t/\hbar}$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{SF}t/\hbar}a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{SF}t/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a\ , &\qquad \tilde{a}^\dagger(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a^\dagger\ ,\\
\tilde{\sigma}_+(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_{AT}t/\hbar}\sigma_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_{AT}t/\hbar} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\sigma_+\ , &\qquad \tilde{\sigma}_-(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\sigma_-\ ,
\end{aligned} \tag{L.4}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_K(t) &= \hbar g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}a^\dagger)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\sigma_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\sigma_-)\\
&= \hbar g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}a\sigma_+ + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t}a\sigma_- + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t}a^\dagger\sigma_+ + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}a^\dagger\sigma_-)\ .
\end{aligned} \tag{L.5}$$

Die Vorfaktoren von $a\sigma_-$ und $a^\dagger\sigma_+$ oszillieren rascher als die anderen, vgl. den Hinweis; folglich tragen diese Terme weniger zum Propagator $\tilde{U}(t) = 1 - \mathrm{i}\hbar^{-1}\int_0^t dt_1\,\tilde{H}_K(t_1) + \ldots$ bei, und dürfen vernachlässigt werden. Die Näherung entspricht der Approximation der rotierenden Welle für den Fall, dass das Feld quantenmechanisch statt klassisch ist.

(c) Wir können daher in (3) die entsprechenden Terme vernachlässigen und gelangen so zu dem Hamilton-Operator des Jaynes-Cummings-Modells:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)\ . \tag{5}$$

Berechne seine Eigenwerte.

Hinweis. $\sigma_3/2 + a^\dagger a$ *ist eine Symmetrie. Wieso? Wie vereinfacht sich* H *auf den Eigenräumen des Symmetrieoperators?*

Lösung. Bei Anwendung von H geht eine Änderung des Eigenwerts von σ_3 von -1 nach $+1$ einher mit einer von $a^\dagger a$ um -1 bzw. umgekehrt. Damit ist $M := \sigma_3/2 + a^\dagger a$ erhalten. Oder präziser:

$$\begin{aligned}
[H, M] &= \hbar g[a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-, M]\ ,\\
[a\sigma_+, M] &= \frac{a}{2}[\sigma_+, \sigma_3] + [a, a^\dagger a]\sigma_+ = a\sigma_+ - a\sigma_+ = 0\ ,\\
[a^\dagger\sigma_-, M] &= 0\ .
\end{aligned} \tag{L.6}$$

Wir diagonalisieren zuerst M. Da $a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle$, $\sigma_3/2|g\rangle = -1/2|g\rangle$ und $\sigma_3/2|a\rangle = 1/2|a\rangle$, sind $m - \frac{1}{2}$ die Eigenwerte von M mit $m = 0, 1, ...$ und den Eigenvektoren

$$\begin{aligned} &|g, 0\rangle \,, \qquad (m = 0) \\ &|a, m-1\rangle \,, |g, m\rangle \,, \qquad (m = 1, 2, ...) \,. \end{aligned} \tag{L.7}$$

Der Eigenraum für $m = 0$ ist eindimensional und $H_{m=0} = -\hbar\omega_0/2$. Die Eigenräume für $m > 0$ sind zweidimensional und H reduziert sich dort auf

$$H_{m>0} = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 + \omega(m-1) & g\sqrt{m} \\ g\sqrt{m} & -\frac{1}{2}\omega_0 + \omega m \end{pmatrix} = \hbar\omega \left(m - \frac{1}{2}\right) 1 + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & 2g\sqrt{m} \\ 2g\sqrt{m} & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix} . \tag{L.8}$$

Die Spur der letzten Matrix in der Summe verschwindet. Da die Spur auch die Summe ihrer Eigenwerte λ ist, sind diese entgegengesetzt gleich und die Determinante der Matrix $-\frac{\hbar^2}{4}((\omega_0 - \omega)^2 + 4g^2 m)$ damit gleich $-\lambda^2$. Die Eigenwerte von $H_{m>0}$ sind daher

$$E_m^\pm = \hbar\omega(m - \frac{1}{2}) \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4g^2 m} \,. \tag{L.9}$$

Übung 2. *Quanten-Dot in der elektromagnetischen Strahlung*

Einen Quanten-Dot kann man als Elektronensystem in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator modellieren. Jeder Zustand kann dann als Tensorprodukt von drei Zuständen des eindimensionalen harmonischen Oszillators geschrieben werden: $|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$. Da die Gesamtenergie $\epsilon_n = \hbar\omega_d(n + 3/2)$ nur von der Summe der drei Quantenzahlen $n = n_x + n_y + n_z$ abhängt, sind die angeregten Zustände, d.h. $n > 0$, entartet. Betrachte das System im Grundzustand $|0, 0, 0\rangle$ unter Wirkung der polarisierten, monochromatische, elektromagnetischen Strahlung (nicht quantisiert)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left[A\, \vec{e}\, e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + A^* \vec{e}^* e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega t} \right] \quad \text{mit} \quad \vec{k} = (0, 0, k) \,. \tag{6}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit des Systems in den angeregten Zustand $|n_x, n_y, n_z\rangle$ ist durch die Goldene Regel gegeben als

$$\Gamma_{0 \to (n_x, n_y, n_z)} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\epsilon_n - \epsilon_0 - \hbar\omega) \frac{e^2}{L^3 c^2} |A|^2 |\langle n_x, n_y, n_z | \hat{\vec{j}}(-\vec{k}) \cdot \vec{e} | 0, 0, 0\rangle|^2 \,, \tag{7}$$

wobei $\hat{\vec{j}}(\vec{k})$ die paramagnetische Stromdichte im Impulsraum ist, d.h.

$$\hat{\vec{j}}(-\vec{k}) = \int d^3 r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{\vec{j}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\hat{\vec{p}}}{m} e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} + e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \frac{\hat{\vec{p}}}{m} \right] \,. \tag{8}$$

Seien $a_i^\dagger$ und a_i die Auf- bzw. Absteigeoperatoren der Zustände $|n_i\rangle$. Bestimme die Matrixelemente $\langle n_x, n_y, n_z | \hat{\vec{j}}(\vec{k}) \cdot \vec{e} | 0, 0, 0\rangle$ durch Substitution von $\hat{\vec{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_d m}} (a_x + a_x^\dagger, a_y + a_y^\dagger, a_z + a_z^\dagger)$ und $\hat{\vec{p}} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_d m}{2}} (a_x - a_x^\dagger, a_y - a_y^\dagger, a_z - a_z^\dagger)$. Betrachte die Fälle von linear polarisierter, $\vec{e} = (1, 0, 0)$, und zirkulär polarisierter, $\vec{e} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$, Strahlung. Gib die totale Absorbtionsrate als Funktion von ω an:

$$\Gamma_{0 \to X}(\omega) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \Gamma_{0 \to (n_x, n_y, n_z)} \,. \tag{9}$$

Hinweis. Benutze die Baker-Hausdorff Beziehung:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \,, \quad \textit{wenn } [A, B] \in \mathbb{C} \,. \tag{10}$$

Lösung. Wir müssen also zunächst berechnen

$$M = \langle n_x, n_y, n_z | \hat{\vec{j}}(-\vec{k}) \cdot \vec{e} | 0,0,0\rangle = \langle n_x, n_y, n_z | \frac{1}{2m} \left[\vec{e} \cdot \hat{\vec{p}} e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} + e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} \vec{e} \cdot \hat{\vec{p}} \right] |0,0,0\rangle \,, \tag{L.10}$$

mit $\vec{k} = (0,0,k)$ und für die gegebenen Polarisationen, für die alle gilt $\vec{e}\cdot\vec{k} = 0$. Definieren wir $c_p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_d}{2m}}$ und $\kappa = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_d m}}k$ und drücken r und p, wie in der Aufgabe angegeben, durch die Auf- und Absteigeoperatoren aus, erhalten wir $\frac{\vec{e}\cdot\hat{\vec{p}}}{m} = c_p e_j (a_j - a_j^\dagger)$ (Summe über j implizit), so wie $i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}} = \kappa(a_z + a_z^\dagger)$. Mit letzterem, der Baker-Hausdorff Beziehung und $[a_z^\dagger, a_z] = -1$ erhalten wir

$$e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} = e^{\kappa a_z^\dagger} e^{\kappa a_z} e^{\kappa^2/2} \,. \tag{L.11}$$

Da $[a_i, a_j^\dagger] = 0$ für $i \neq j$, kommutieren die beiden Faktoren in der Klammer in (L.10) und wir erhalten

$$\begin{aligned} M &= \langle n_x, n_y, n_z | c_p e_j (a_j - a_j^\dagger) e^{\kappa a_z^\dagger} e^{\kappa a_z} e^{\kappa^2/2} |0,0,0\rangle = c_p e^{\kappa^2/2} \langle n_x, n_y | e_j (a_j - a_j^\dagger) |0,0\rangle \langle n_z | e^{\kappa a_z^\dagger} e^{\kappa a_z} |0\rangle \\ &= -c_p e^{\kappa^2/2} \langle n_x, n_y | e_j a_j^\dagger |0,0\rangle \langle n_z | e^{\kappa a_z^\dagger} |0\rangle = -c_p e^{\kappa^2/2} \langle n_x, n_y | e_j a_j^\dagger |0,0\rangle \langle n_z | (\kappa a_z^\dagger)^{n_z}/n_z! |0\rangle \\ &= -c_p e^{\kappa^2/2} \langle n_x, n_y | e_j a_j^\dagger |0,0\rangle \, \kappa^{n_z} / \sqrt{n_z!} \,, \end{aligned} \tag{L.12}$$

wo wir im ersten Schritt die Unabhängigkeit der beiden Teile und im zweiten die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion so wie $a|0\rangle = 0$ verwendet haben. Da $\langle n_x, n_y, n_z | n'_x, n'_y, n'_z\rangle = 0$, falls mindestens ein $n_i \neq n'_i$, konnten wir im dritten Schritt $e^{\kappa a_z^\dagger}$ durch $(\kappa a_z^\dagger)^{n_z}/n_z!$ ersetzen und im letzten Schritt $\langle n | (a^\dagger)^n | 0\rangle = \langle n | \sqrt{n!} | n\rangle = \sqrt{n!}$ nutzen.

Das Resultat von $\langle n_x, n_y | e_j a_j^\dagger | 0,0\rangle$ hängt von der Polarisation ab. Für lineare Polarisiation, $\vec{e} = (1,0,0)$, erhalten wir wegen der Orthogonalität der Zustände, $\delta_{n_x 1}\delta_{n_y 0}$. Für zirkuläre Polarisation, $\vec{e} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$, dagegen $(\delta_{n_x 1}\delta_{n_y 0} \pm i\delta_{n_x 0}\delta_{n_y 1})/\sqrt{2}$. In beiden Fällen ist $n_x + n_y = 1$ und $\sum_{n_x n_y} |\langle n_x, n_y | e_j a_j^\dagger | 0,0\rangle|^2 = 1$.

In (7) können wir das Argument der δ-Funktion $\epsilon_n - \epsilon_0 - \hbar\omega = \hbar\omega_d((n_x + n_y + n_z + 3/2) - 3/2 - \omega/\omega_d)$ daher ersetzen durch $\hbar\omega_d(n_z + 1 - \omega/\omega_d)$. Setzen wir unsere Resultate in (7) ein und ersetzen vermöge der δ-Funktion außerhalb dieser n_z durch $\omega/\omega_d - 1$ und nuten $k = \omega/c$, erhalten wird

$$\Gamma_{0\to X}(\omega) = \frac{\pi\omega_d}{m} \frac{e^2}{L^3 c^2} |A|^2 e^{-k^2 \frac{\hbar}{2\omega_d m}} \sum_{n_z} \frac{1}{\hbar\omega_d} \delta(n_z + 1 - \omega/\omega_d) \left(\frac{\hbar\omega^2}{2\omega_d m c^2} \right)^{\frac{\omega}{\omega_d} - 1} \Big/ \Gamma\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) \,, \tag{L.13}$$

wo Γ (ohne Index) die Gammafunktion ist, welche für positive natürliche Zahlen $\Gamma(n) = (n-1)!$ ist.