Übung 1. *Das Strahlungsfeld und der Feldoperator.*

Durch die Quantisierung des Strahlungsfeldes kann das Vektorpotential neu als Operator geschrieben werden. Man bezeichnet es dann als Feldoperator, der gegeben ist durch

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},\lambda) \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} \boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{k},\lambda) \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right). \tag{1}$$

Dabei sind $\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ und $\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}$ die Auf- und Absteigeoperatoren der Moden des Strahlungsfeldes. Sie erfüllen die Kommutationsrelationen

$$[\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}, \hat{a}_{\boldsymbol{k'},\lambda'}] = [\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'},\lambda'}] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k'},\lambda'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}} \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{2}$$

und ihre Zeitentwicklung (sie erfüllen die Gleichung eines harmonischen Oszillators) ist

$$\frac{\partial \hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\partial t} = -i\omega_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}}{\partial t} = +i\omega_{\boldsymbol{k}} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}, \tag{3}$$

wobei die Dispersionsrelation $\omega_{\boldsymbol{k}} = c\,|\boldsymbol{k}|$ gilt.
Die Polarisationsvektoren sind orthonormal $\boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$ und in der Coulomb-Eichung ist die Polarisation transversal $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{k} = 0$.
Das elektrische und das magnetische Feld sind gegeben durch $\hat{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{A}}$ und $\hat{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \hat{\boldsymbol{A}}$.

(a) Zeige, dass die Energie des Strahlungsfeldes durch

$$\hat{H}_{SF} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \left(|\hat{\boldsymbol{E}}|^2 + |\hat{\boldsymbol{B}}|^2 \right) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} \hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \tag{4}$$

gegeben ist und der Impuls anhand des Poyntingvektors durch

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3x \left(\hat{\boldsymbol{E}} \times \hat{\boldsymbol{B}} \right) = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} \hbar\boldsymbol{k}\, \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} \hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}. \tag{5}$$

Der Besetzungszahlzustand $|\{N_{\boldsymbol{k}\lambda}\}\rangle = |N(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), N(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2), ..., N(\boldsymbol{k},\lambda), ...\rangle$ beschreibt das Strahlungsfeld in dem die verschiedenen Moden $(\boldsymbol{k},\lambda)$ mit $N(\boldsymbol{k},\lambda)$ Photonen besetzt sind. Der Zahloperator für die Mode $(\boldsymbol{k},\lambda)$ ist gegeben durch $\hat{N}_{\boldsymbol{k},\lambda} = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda}\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}$ und die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren ist wie beim harmonischen Oszillator

$$\hat{a}_{\boldsymbol{k},\lambda} |N(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), ..., N(\boldsymbol{k},\lambda), ...\rangle = \sqrt{N(\boldsymbol{k},\lambda)} |N(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), ..., N(\boldsymbol{k},\lambda) - 1, ...\rangle, \tag{6}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\lambda} |N(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), ..., N(\boldsymbol{k},\lambda), ...\rangle = \sqrt{N(\boldsymbol{k},\lambda) + 1} |N(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1), ..., N(\boldsymbol{k},\lambda) + 1, ...\rangle. \tag{7}$$

(b) Berechne den Erwartungswert von $\hat{\boldsymbol{E}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{H}$ und $\hat{\boldsymbol{P}}$ für einen gegebenen Besetzungszahlzustand.

Übung 2. ***Der Aharonov-Bohm-Effekt.***

Erweitert man das Doppelspaltexperiment um eine magnetische Spule, die sich in der mittleren Wand befindet (siehe Abb.2), deren Magnetfeld die Elektronen jedoch nicht direkt beeinflussen kann, so hängt das Interferenzmuster trotzdem vom magnetischen Fluss durch die Ebene ab. Dies ist der Aharonov-Bohm-Effekt, den wir in dieser Aufgabe herleiten wollen.

(a) Zur Vorbereitung:
Betrachte ein Elektron, das sich in einem Gebiet G bewegt und ein zeitunabhängiges Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, das in diesem Gebiet verschwindet (z. B. ausserhalb einer unendlich langen Spule), siehe Abb. 1.
Es sei $\psi_0(\boldsymbol{x})$ die Wellenfunktion bei ausgeschaltetem Magnetfeld ($\boldsymbol{B} = 0$ überall) und $\psi_B(\boldsymbol{x})$ die Wellenfunktion bei eingeschaltetem Magnetfeld ($\boldsymbol{B} = 0$ in G). Zeige, dass

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \psi_0(\boldsymbol{x}) \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right), \tag{8}$$

wobei $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in G$ durch einen Pfad in G verbunden sind und $\boldsymbol{A}$ das zum eingeschalteten Magnetfeld $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ gehörige Vektorpotential ist.

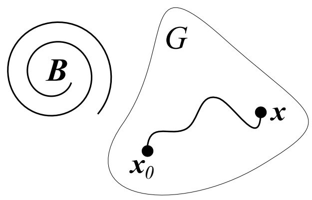

Abbildung 1: Das Elektron bewegt sich im magnetfeldfreien Gebiet G von $\boldsymbol{x}_0$ nach $\boldsymbol{x}$. Eine Spule erzeugt in ihrem Innern ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}$, das senkrecht zur Zeichenebene steht.

Hinweis. Finde einen Ausdruck für das Vektorpotential im Gebiet G und verwende eine passende Eichtransformation.

(b) Nun betrachten wir das erweiterte Doppelspaltexperiment. Berechne die Intensität des Interferenzmusters.

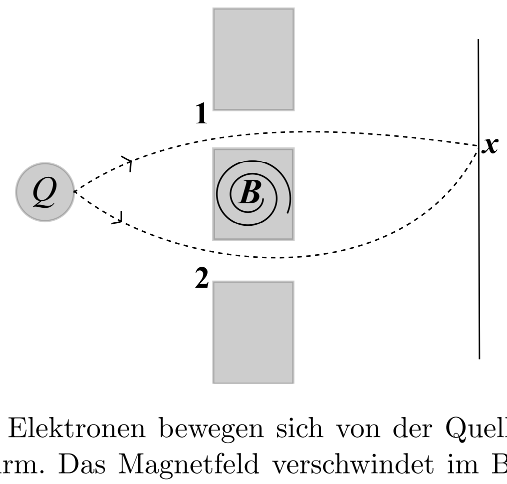

Abbildung 2: Die Elektronen bewegen sich von der Quelle durch den Doppelspalt zum Schirm. Das Magnetfeld verschwindet im Bereich wo sich die Elektronen aufhalten.

Hinweis. Betrachte die Wellenfunktionen für den Fall wo nur der Spalt 1 resp. 2 geöffnet ist zuerst einzeln und bilde dann deren Superposition.