Übung 1. *Bornsche Näherung für das Yukawa-Potential*

Untersuche die Streuung eines massiven skalaren Teilchens mit $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ an einem Yukawa-Potential

$$V(r) = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{r}\,,\ \mu > 0\,. \tag{1}$$

(a) Welche Symmetrie besitzt das Potential? Fällt es in großer Entfernung des Streuzentrums schnell genug ab, um die in der Vorlesung diskutierten Methoden nutzen zu können?

Lösung: Das Potential ist rotationssymmetrisch. Da für $\mu > 0$, $\lim_{r\to\infty} re^{-\mu r}/r = 0$, erfüllt es die Gleichung (1.1.1) des Skriptes, welche unter anderem für die dortige Gleichung (1.1.16) vorausgesetzt wird.

(b) Zeige: In der Bornschen Näherung ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{|2k^2(1-\cos\theta)+\mu^2|^2}\,, \tag{2}$$

wo θ der Streuwinkel und k der Betrag des einlaufenden Impulses $\vec{k}$ sind.

Hinweise: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ und der Streuamplitude $f(\vec{k},\vec{k}')$? Durch welchen Ausdruck ist $f(\vec{k},\vec{k}')$ in der Bornschen Näherung gegeben? Wie verhält sich $|\vec{k}'|$ zu $|\vec{k}|$? Welche Koordinaten bieten sich für die Integration an?

Lösung: Wegen (1.3.56) gilt $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\vec{k},\vec{k}')|^2$. Daher wollen wir nun $f(\vec{k},\vec{k}')$ bestimmen, welches nach (1.5.3) gegeben ist durch

$$f(\vec{k},\vec{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}^3x'' e^{-i\vec{k}'\vec{x}''} V(\vec{x}'') e^{i\vec{k}\vec{x}''}\,. \tag{L.1}$$

Da die Streuung elastisch ist, gilt $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$. Mit $q = |\vec{q}| = |\vec{k}-\vec{k}'|$ und zu Polarkoordinaten übergehend finden wir

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{mV_0} f(\vec{k},\vec{k}') &= -\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^3x'' e^{i\vec{x}''(\vec{k}-\vec{k}')}\frac{e^{-\mu|\vec{x}''|}}{|\vec{x}''|} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta'' e^{irq\cos\theta''}\frac{e^{-\mu r}}{r} \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{d}r\, re^{-\mu r}\frac{1}{irq}(e^{irq}-e^{-irq}) = -\frac{1}{iq}\left(\frac{1}{\mu-iq}-\frac{1}{\mu+iq}\right) = \frac{2}{\mu^2+q^2}\,,\end{aligned} \tag{L.2}$$

wo wir für das Integral im vorletzten Schritt

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-\mu r \pm irq} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{r(-\mu\pm iq)} = \frac{1}{-\mu\pm iq}e^{r(-\mu\pm iq)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\mu\mp iq} \tag{L.3}$$

benutzt haben. Mit $\theta = \angle(\vec{k}',\vec{k})$ können wir schreiben

$$\vec{q}^{\,2} = (\vec{k}-\vec{k}')^2 = |\vec{k}|^2(1-2\cos\theta+1) = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}\,. \tag{L.4}$$

Daher ist

$$f(\vec{k},\vec{k}') = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\frac{1}{\mu^2+2k^2(1-\cos\theta)} \tag{L.5}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}\frac{1}{(\mu^2+2k^2(1-\cos\theta))^2}\,, \tag{L.6}$$

was zu zeigen war.

(c) Von Gleichung (2) ausgehend bestimme den total Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,. \tag{3}$$

Lösung: Wir müssen also (2) über die Winkel integrieren. Das ϕ-Integral ist trivial und ergibt 2π. Wegen

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x(ax+b)^{-2} = -\frac{1}{a}(ax+b)^{-1}\big|_{-1}^{+1} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{-a+b}\right) = \frac{2}{b^2-a^2} \tag{L.7}$$

erhalten wir für das $\cos(\theta)$-Integral $\frac{2}{(\mu^2+2k^2)^2-(2k^2)^2} = \frac{2}{\mu^4+4\mu^2k^2}$. Daher ist der totale Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{4m^2V_0^2}{\hbar^4} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{\mu^2(\mu^2+4k^2)} = \frac{16\pi m^2 V_0^2}{\hbar^4\mu^2(\mu^2+4k^2)} \,. \tag{L.8}$$

(d) Hängen die Ergebnisse der beiden letzten Teilaufgaben von dem Vorzeichen von V_0 ab, d.h. unterscheiden sich die Wirkungsquerschnitte in der Bornschen Näherung zwischen anziehendem und abstoßendem Potential?
Welches bekannte Potential erhält man als Grenzfall des Yukawa-Potentials für $\mu \to 0$? Welcher differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich in diesem Fall? Erfüllt das betrachtete Potential die in Teil (a) diskutierten Kriterien? Falls nicht, wie äußert sich dies hinsichtlich des naiven Resultats für den totalen Wirkungsquerschnitt?

Hinweise: Nutze (2). Nimmt der totale Wirkungsquerschnitt einen physikalisch sinnvollen Wert an?

Lösung: Da sowohl (2) als damit auch (L.8) nur quadratisch von V_0 abhängen, wirkt sich das Vorzeichen des Potentials nicht auf unsere Ergebnisse aus. Im Grenzfall $\mu \to 0$ ergibt sich das Coulomb-Potential (oder, je nach Wahl von V_0, ein anderes antilinear zu r abfallendes Potential). Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich als

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{4k^4(1-\cos\theta)^2} = \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{4k^4\sin^4(\theta/2)} \,, \tag{L.9}$$

welcher für geeignetes V_0 der Rutherfordschen Formel entspricht. Da das Potential im Unendlichen nicht schneller als $1/r$ abfällt, erfüllt es Gleichung (1.1.1) nicht, welche aber eine Annahme in der Berechnung von $f(\vec{k}, \vec{k}')$ war. Deshalb können wir diesem naiven Resultat nur eingeschränkt trauen und erhalten in der Tat für den hier divergenten totalen Wirkungsquerschnitt offensichtlich kein physikalisch sinnvolles Resultat.

Übung 2. *Resonanzen bei niedrigen Energien und die Breit-Wigner-Formel*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Streuung an einem allgemeinen rotationssymmetrischen Potential $V(\vec{x}) = V(r)$, welches außerhalb des Radius R $(0 < R < \infty)$ verschwindet. Wie aus der Vorlesung bekannt, führt der Separationsansatz $\psi(\vec{x}) = R_l(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi)$ mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ für den Radialteil $R_l(r)$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(-\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + v(r)\right) rR_l(k,r) = k^2 rR_l(k,r) \,, \tag{4}$$

mit

$$v(r) := \frac{2m}{\hbar^2}V(r) \,, \quad k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \,. \tag{5}$$

Da wir hier nur an Streuzuständen interessiert sind, liegen die Energien E im positiven, kontinuierlichen Spektrum. Außerhalb der Reichweite des Potentials, d.h. für $r > R$, führt die Partialwellenentwicklung auf die Wellenfunktionen

$$R_l^>(k,r) = \frac{1}{2}\left(h_l^*(kr) + e^{2i\delta_l(k)}h_l(kr)\right) \,, \tag{6}$$

mit den Hankelfunktionen $h_l(x) = j_l(x) + in_l(x)$. Für $r < R$ sei $R_l^<(k,r)$ die entsprechende Wellenfunktion, für die wir

$$\alpha_l := \partial_r \log R_l^<\Big|_{r=R} \tag{7}$$

definieren. Das Ziel der Übung ist, das Verhalten der partiellen Wirkungsquerschnitte $\sigma_l(E)$ in der Nähe der zugehörigen Maxima E_r (der Resonanzenergien) für den Fall der Niedrigenergiestreuung ($kR \ll 1$) zu bestimmen.

(a) Zeige mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung der Gesamtwellenfunktion, dass

$$\cot \delta_l = \left. \frac{k\partial_x n_l(x) - \alpha_l n_l(x)}{k\partial_x j_l(x) - \alpha_l j_l(x)} \right|_{x=kR} . \tag{8}$$

Lösung: Die Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung implizieren

$$\partial_r \log R_l^{>}\big|_{r=R} = \partial_r \log R_l^{<}\big|_{r=R} = \alpha_l \,, \tag{L.10}$$

wobei die letzte Gleichung α_l definiert. Den Ansatz (6) für die Wellenfunktion außerhalb der Reichweite R des Potentials einsetzend folgt

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \left. \frac{k[\partial_x h_l^*(x) + e^{2i\delta_l(k)}\partial_x h_l(x)]}{h_l^*(x) + e^{2i\delta_l(k)} h_l(x)} \right|_{x=kR} = \left. \frac{k[j_l'(x)(1+e^{2i\delta_l(k)}) + i n_l'(x)(-1+e^{2i\delta_l(k)})]}{j_l(x)(1+e^{2i\delta_l(k)}) + i n_l(x)(-1+e^{2i\delta_l(k)})} \right|_{x=kR} \\ &= \left. \frac{k[j_l'(x)\cos\delta_l(k) - n_l'(x)\sin\delta_l(k)]}{j_l(x)\cos\delta_l(k) - n_l(x)\sin\delta_l(k)} \right|_{x=kR} = \left. \frac{k[j_l'(x)\cot\delta_l(k) - n_l'(x)]}{j_l(x)\cot\delta_l(k) - n_l(x)} \right|_{x=kR} , \end{aligned} \tag{L.11}$$

wo der Strich die Ableitung nach $x = kr$ symbolisiert. Dies nach $\cot\delta_l(k)$ auflösend erhalten wir

$$\cot \delta_l(k) = \left. \frac{k\partial_x n_l(x) - \alpha_l n_l(x)}{k\partial_x j_l(x) - \alpha_l j_l(x)} \right|_{x=kR} . \tag{L.12}$$

Damit beeinflusst das Potential $V(r)$ die Phasenverschiebung $\delta_l(k)$ nur durch die logarithmische Ableitung α_l der Radialteile der Wellenfunktionen an der Stelle R.

(b) Drücke den totalen Wirkungsquerschnitt σ_l der l-ten Partialwelle

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{9}$$

als Funktion von $\cot\delta_l$ aus. Zeige das dieser maximiert wird, wenn

$$l + 1 + \alpha_l(E_r)R = 0 \,. \tag{10}$$

Die zugehörigen Energieeigenwerte E_r sind die *Resonanzenergien* im Niederenergiebereich.

Hinweis: Nutze die asympotischen Ausdrücke der vorherigen Serie

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad \textit{für } x \to 0 \,, \tag{11}$$

mit $(2l \pm 1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l \pm 1)$.

Lösung: Gleichung (9) umschreibend erhalten wir

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{\sin^2\delta_l}{\sin^2\delta_l + \cos^2\delta_l} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{1}{1+\cot^2\delta_l} \,. \tag{L.13}$$

Wir betrachten nun (8) für $kR \ll 1$. Mit den asymptotischen Ausdrücken für die Bessel- und Neumannfunktionen finden wir

$$\cot\delta_l(k) \approx \frac{\left(\frac{l+1}{R} + \alpha_l\right)\frac{(2l-1)!!}{(kR)^{l+1}}}{\left(\frac{l}{R} - \alpha_l\right)\frac{(kR)^l}{(2l+1)!!}} = \frac{(2l+1)!!(2l-1)!!}{(kR)^{2l+1}}\frac{l+1+\alpha_l R}{l - \alpha_l R} \,. \tag{L.14}$$

Setzt man dies in (L.13) ein, erhält man

$$\sigma_l \approx \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\left(1+\left[\frac{(2l+1)!!(2l-1)!!}{(kR)^{2l+1}}\frac{l+1+\alpha_l R}{l-\alpha_l R}\right]^2\right)^{-1} . \tag{L.15}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle: Falls $(l+1+\alpha_l R)/(l-\alpha_l R)$ nicht verschwindet, dann ist

$$\sigma_l \approx 4\pi R^2(2l+1)(kR)^{4l}\left[(2l+1)!!(2l-1)!!\frac{l+1+\alpha_l R}{l-\alpha_l R}\right]^{-2} . \tag{L.16}$$

Da dies proportional zu $(kR)^{4l}$ abfällt, ist der partielle Wirkungsquerschnitt bei niedrigen Energien in diesem Fall eine monoton fallende Funktion der Quantenzahl l. Insbesondere wird das Maximum bei $l = 0$ angenommen. Daher kann man in guter Näherung schreiben

$$\sigma = \sum_{l\geq 0}\sigma_l \approx \sigma_{l=0} = 4\pi R^2\left(\frac{\alpha_0 R}{1+\alpha_0 R}\right)^2 . \tag{L.17}$$

Gilt jedoch für eine Energie $E_r = \hbar^2 k_r^2/2m$ (Resonanzenergie)

$$l+1+\alpha_l(E_r)R = 0\,, \tag{L.18}$$

treffen die letzten Überlegungen nicht zu, da dann wegen (L.14) $\cot\delta_l$ verschwindet. In diesem Fall ist nach (L.13) $\sigma_l = 4\pi(2l+1)/k^2 \propto k^{-2}$ für *alle* l. Da $kR \ll 1$, ist dies viel größer als (L.17) und die Resonanzenergien E_r maximieren daher den partiellen Wirkungsquerschnitt σ_l für jeden Kanal l.

(c) Zeige, dass nahe der Resonanzenergie $E_r = \hbar^2 k_r^2/2m$ die Breit-Wigner-Formel

$$\begin{aligned}\sigma_l(E) &\approx \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2+(\Gamma/2)^2} \quad \text{mit}\\ \Gamma &:= -2k_r^{2l+1}R^{2l}\Big/\left([(2l-1)!!]^2\,\tfrac{\mathrm{d}\alpha_l(E)}{\mathrm{d}E}\Big|_{E=E_r}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

den partiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_l(E)$ approximiert.

Lösung: Die Taylor-Entwicklung um die Resonanzenergie E_r ergibt

$$l+1+\alpha_l(E)R \approx 0 + \frac{\mathrm{d}\alpha_l(E)R}{\mathrm{d}E}\Big|_{E=E_r}(E-E_r)\,. \tag{L.19}$$

Dies in (L.14) einsetzend finden wir

$$\begin{aligned}\cot\delta_l(k) &\approx \frac{(2l+1)!!(2l-1)!!}{(kR)^{2l+1}}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_l(E)R}{\mathrm{d}E}\Big|_{E=E_r}(E-E_r)\right)\Big/(2l+1)\\ &= -\frac{2(E-E_r)}{\Gamma}\,,\end{aligned} \tag{L.20}$$

wo wir im letzten Schritt in Übereinstimmung mit (12) definiert haben

$$\Gamma := -\frac{2k_r^{2l+1}R^{2l}}{[(2l-1)!!]^2\,\frac{\mathrm{d}\alpha_l(E)}{\mathrm{d}E}\Big|_{E=E_r}} . \tag{L.21}$$

Daher wird der Wirkungsquerschnitt des l-ten Kanals im Bereich der Resonanzenergie gut durch ein Lorentz-Profil beschrieben

$$\begin{aligned}\sigma_l &= \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{1}{\cot^2\delta_l+1} \approx \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{1}{\frac{4(E-E_r)^2}{\Gamma^2}+1}\\ &= \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2+(\Gamma^2/2)^2}\,,\end{aligned} \tag{L.22}$$

wobei der Parameter Γ die Breite der Resonanz beschreibt. Dies ist die Breit-Wigner-Formel.