Übung 1. *Bornsche Näherung für das Yukawa-Potential*

Untersuche die Streuung eines massiven skalaren Teilchens mit $H_0 = \frac{p^2}{2m}$ an einem Yukawa-Potential

$$V(r) = \frac{V_0 e^{-\mu r}}{r}\,,\ \mu > 0\,. \tag{1}$$

(a) Welche Symmetrie besitzt das Potential? Fällt es in großer Entfernung des Streuzentrums schnell genug ab, um die in der Vorlesung diskutierten Methoden nutzen zu können?

(b) Zeige: In der Bornschen Näherung ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{|2k^2(1-\cos\theta)+\mu^2|^2}\,, \tag{2}$$

wo θ der Streuwinkel und k der Betrag des einlaufenden Impulses $\vec{k}$ sind.

Hinweise: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ und der Streuamplitude $f(\vec{k},\vec{k}')$? Durch welchen Ausdruck ist $f(\vec{k},\vec{k}')$ in der Bornschen Näherung gegeben? Wie verhält sich $|\vec{k}'|$ zu $|\vec{k}|$? Welche Koordinaten bieten sich für die Integration an?

(c) Von Gleichung (2) ausgehend bestimme den total Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,. \tag{3}$$

(d) Hängen die Ergebnisse der beiden letzten Teilaufgaben von dem Vorzeichen von V_0 ab, d.h. unterscheiden sich die Wirkungsquerschnitte in der Bornschen Näherung zwischen anziehendem und abstoßendem Potential?
Welches bekannte Potential erhält man als Grenzfall des Yukawa-Potentials für $\mu \to 0$? Welcher differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich in diesem Fall? Erfüllt das betrachtete Potential die in Teil (a) diskutierten Kriterien? Falls nicht, wie äußert sich dies hinsichtlich des naiven Resultats für den totalen Wirkungsquerschnitt?

Hinweise: Nutze (2). Nimmt der totale Wirkungsquerschnitt einen physikalisch sinnvollen Wert an?

Übung 2. *Resonanzen bei niedrigen Energien und die Breit-Wigner-Formel*

In dieser Aufgabe betrachten wir die Streuung an einem allgemeinen rotationssymmetrischen Potential $V(\vec{x}) = V(r)$, welches außerhalb des Radius R $(0 < R < \infty)$ verschwindet. Wie aus der Vorlesung bekannt, führt der Separationsansatz $\psi(\vec{x}) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\theta,\phi)$ mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ für den Radialteil $R_l(r)$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(-\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + v(r)\right) rR_l(k,r) = k^2 rR_l(k,r)\,, \tag{4}$$

mit

$$v(r) := \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\,,\ \ k := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\,. \tag{5}$$

Da wir hier nur an Streuzuständen interessiert sind, liegen die Energien E im positiven, kontinuierlichen Spektrum. Außerhalb der Reichweite des Potentials, d.h. für $r > R$, führt die Partialwellenentwicklung auf die Wellenfunktionen

$$R_l^>(k,r) = \frac{1}{2}\left(h_l^*(kr) + e^{2i\delta_l(k)} h_l(kr)\right) , \tag{6}$$

mit den Hankelfunktionen $h_l(x) = j_l(x) + i n_l(x)$. Für $r < R$ sei $R_l^<(k,r)$ die entsprechende Wellenfunktion, für die wir

$$\alpha_l := \partial_r \log R_l^< \Big|_{r=R} \tag{7}$$

definieren. Das Ziel der Übung ist, das Verhalten der partiellen Wirkungsquerschnitte $\sigma_l(E)$ in der Nähe der zugehörigen Maxima E_r (der Resonanzenergien) für den Fall der Niedrigenergiestreuung ($kR \ll 1$) zu bestimmen.

(a) Zeige mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung der Gesamtwellenfunktion, dass

$$\cot\delta_l = \left.\frac{k\partial_x n_l(x) - \alpha_l n_l(x)}{k\partial_x j_l(x) - \alpha_l j_l(x)}\right|_{x=kR} . \tag{8}$$

(b) Drücke den totalen Wirkungsquerschnitt σ_l der l-ten Partialwelle

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{9}$$

als Funktion von $\cot\delta_l$ aus. Zeige das dieser maximiert wird, wenn

$$l + 1 + \alpha_l(E_r)R = 0 . \tag{10}$$

Die zugehörigen Energieeigenwerte E_r sind die *Resonanzenergien* im Niederenergiebereich.

Hinweis: Nutze die asympotischen Ausdrücke der vorherigen Serie

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad \textit{für } x \to 0 , \tag{11}$$

mit $(2l \pm 1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l \pm 1)$.

(c) Zeige, dass nahe der Resonanzenergie $E_r = \hbar^2 k_r^2/2m$ die Breit-Wigner-Formel

$$\begin{aligned} &\sigma_l(E) \approx \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad \text{mit} \\ &\Gamma := -2k_r^{2l+1}R^{2l} \Big/ \left([(2l-1)!!]^2 \tfrac{\mathrm{d}\alpha_l(E)}{\mathrm{d}E}\big|_{E=E_r}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

den partiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_l(E)$ approximiert.