

## Kontinuumsmechanik. Übung 12.

FS12

Keine Abgabe

### 1. Drehmoment auf einen umströmten Körper

In der Vorlesung wurde die Kraft  $\vec{F} = - \oint_{\partial K} p \vec{n} ds$  auf einen Körper  $K$  in 2 Dimensionen durch das Geschwindigkeitsfeld statt des Drucks  $p$  ausgedrückt, vgl. (9.8, 9.9); hier dasselbe für das Drehmoment

$$M = - \oint_{\partial K} \vec{x} \wedge p \vec{n} ds$$

bzgl.  $\vec{x} = 0$ , wobei  $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$  (das Drehmoment hat nur eine Komponente in 2 Dimensionen). Zeige:

i)

$$M = - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_{\Gamma} w^2(z) z dz,$$

wobei  $\Gamma$  eine beliebige Schleife ist, die  $K$  umfährt, und  $w$  das komplexe Geschwindigkeitsfeld ist.

ii) Sei  $\vec{v}(\vec{x}) \rightarrow \vec{v}_{\infty}$ , ( $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ). Dann ist

$$M = 2\pi\rho(v_{\infty 1} \operatorname{Im} w_2 - v_{\infty 2} \operatorname{Re} w_2),$$

wobei  $w_2$  der Koeffizient von  $z^{-2}$  in der Laurent-Entwicklung von  $w(z)$  ist.

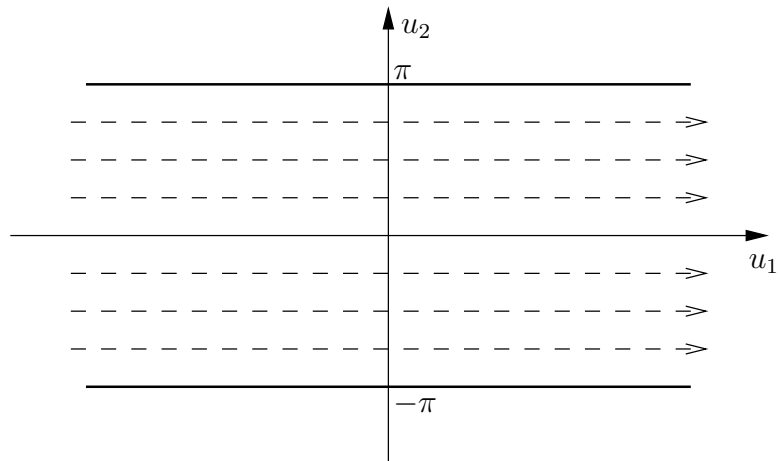
iii) Betrachte eine konforme Abbildung  $\mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \tilde{K}$ ,  $z \mapsto \tilde{z}$ , die sich im Unendlichen der Identität nähert,

$$\tilde{z} = z + \frac{k_1}{z} + O(z^{-2}), \quad (z \rightarrow \infty);$$

ferner zwei Strömungen wie in (ii), die sich unter der Abbildung entsprechen. Insbesondere sind  $\vec{v}_{\infty}$  und  $\vec{F} = -\rho Z \vec{v}_{\infty}^{\perp}$  für beide gleich; nicht so die Drehmomente. Finde die Beziehung zwischen dem Drehmoment  $M$  auf  $K$  und jenem,  $\tilde{M}$ , auf  $\tilde{K}$ . Wende das Ergebnis an auf die "gedrehte Plattenströmung" in Beispiel 3 auf S. 92 des Skripts und berechne das Drehmoment für die Strömungen am Zylinder, bzw. an der Platte.

### 2. Ausströmung zwischen zwei Platten

Betrachte die 2-dimensionale Strömung einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei unbegrenzten Platten in der  $u$ -Ebene ( $u = u_1 + iu_2$ ):



Die Stromlinien seien durch  $u_2 = \text{const}$  gegeben. Bestimme das Bild von  $|u_2| < \pi$  unter der Abbildung

$$z = u + e^u$$

und zeichne die Stromlinien in der  $z$ -Ebene.