

# Kontinuumsmechanik. Übung 8.

FS12

Abgabe: 8.5.12

## 1. Anwendungen des Satzes von Bernoulli

a) Ausflussgeschwindigkeit

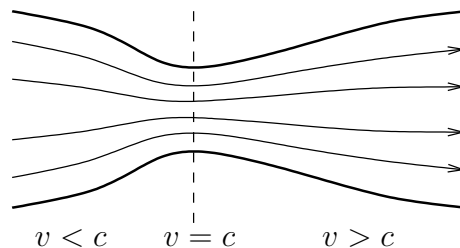
Ein Behälter sei bis zur Höhe  $h$  mit einer inkompressiblen, idealen Flüssigkeit gefüllt. Sie fließt durch ein Loch am Boden aus, dessen Querschnitt viel kleiner als die Oberfläche der Flüssigkeit ist. Berechne die Austrittsgeschwindigkeit.

b) Hugoniot-Gleichung und Laval-Düse

Ein kompressibles Gas mit Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  fließe stationär in einem horizontalen Rohr ( $U = 0$ ). Das Rohr weise einen langsam veränderlichen Querschnitt (Fläche  $F$ ) auf so, dass die Geschwindigkeit  $v$  in guter Näherung senkrecht zu jedem einzelnen Querschnitt verläuft; dort sei sie zudem konstant. Leite die Hugoniot-Gleichung her:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right), \quad (1)$$

wobei  $c$  in  $c^2 = dp/d\rho$  die Schallgeschwindigkeit ist (s. später in der Vorlesung). Erkläre damit die Funktionsweise einer Laval-Düse: Ein Gas, das mit Geschwindigkeit  $v < c$  einströmt und bei der Verengung  $v = c$  erreicht, beschleunigt danach weiter auf  $v > c$ .



*Hinweis:* Alle Funktionen  $F(v)$  der Lösungsschar von Gl. (1) haben ihr Minimum bei  $v = c$ . Stelle die Schar qualitativ graphisch dar.

## 2. Helmholtzscher Wirbelsatz

Man beweise den Helmholtzschen Wirbelsatz (= Wirbellinien werden durch die Strömung in Wirbellinien abgebildet, falls  $D\vec{v}/Dt$  ein Gradientenfeld ist) indem man zeigt, dass

$$\left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \Big|_{(\phi_t(\mathbf{y}), t)} = D\phi_t(\mathbf{y}) \cdot \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \Big|_{(\mathbf{y}, 0)}, \quad (2)$$

wobei  $\phi_t \equiv \phi_{(t,0)}$  die Flussabbildung ist und  $D\phi_t(\mathbf{y})$  ihre Tangentialabbildung.

*Hinweis:* Man zeige, dass beide Seiten der Gleichung (2) derselben Differentialgleichung bzgl.  $t$  mit gleichen Anfangsbedingungen genügen. Verwende dazu (7.11) aus dem Skript.