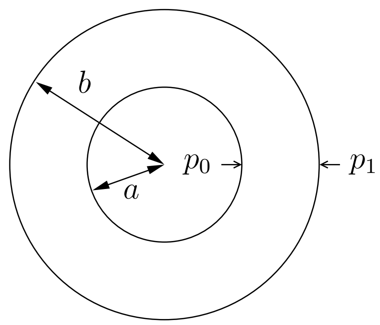
Kontinuumsmechanik. Übung 4.

FS12 *Abgabe: 27.3.12*

1. Zylindrisches Rohr

i) Ein elastisches zylindrisches Rohr ist einem inneren Druck p_0 und einem äusseren Druck p_1 unterworfen. Seine Länge werde festgehalten (ebener Verschiebungszustand) und es seien keine Volumenkräfte vorhanden. Bestimme den Verschiebungszustand $u(x)$ und den Spannungszustand $\sigma(x)$, die im Gleichgewicht herrschen. Welche ist die im Fall $p_0 > p_1$ grösste auftretende Hauptspannung? Wo tritt sie auf?

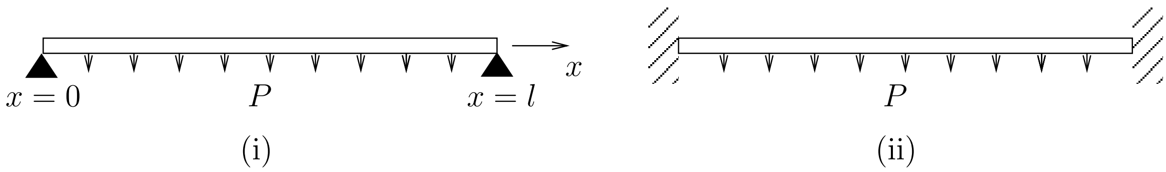


Hinweis: Verwende zylindrische Koordinaten, insbesondere (1.14) und Aufgabe 2.1. Das Gleichgewicht ist durch die Navier-Gleichung (2.19) bestimmt.

ii) Spezialisiere die Resultate aus (i) auf die Fälle $b = \infty$ (zylindrischer Hohlraum), sowie $a = 0$ (Vollzylinder).

2. Biegung eines Balkens

Ein horizontaler, homogener Balken (Länge l, Gewicht P) ist an beiden Enden entweder (i) aufgelegt oder (ii) eingespannt. Bestimme in der Euler-Bernoulli Näherung die Gestalt der Schwerpunktslinie und ihre maximale Ausbiegung. Das Gewicht wirke in Richtung einer Hauptachse der Querschnittsfläche.



Hinweis: Der Fall (ii) erfordert ein Drehmoment auf die Stirnflächen. Er ist somit die Superposition von (i) und einer reinen Biegung.

3. Photoelastizität

Das Spannungsfeld einer ebenen Platte kann mit Licht sichtbar gemacht werden, sofern sie durchsichtig ist (Brewster), etwa durch Anfertigung eines Modells aus Plexiglas (s. Figur links). Die Platte der Dicke d liege in der 12-Ebene und ihr Spannungszustand sei eben:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} \equiv 0 \ ,$$
$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(x_1, x_2) \ , \qquad (i, k = 1, 2; 0 < x_3 < d) \ .$$

Monochromatisches Licht verlaufe in 3-Richtung. Liegt seine Polarisation $\underline{E} \in \mathbb{C}^2$ parallel zu einer Hauptachse des Tensors $\underline{n} = (n_{ik})_{i,k=1,2}$ des Brechungsindex mit Eigenwert n, so ist die Welle

$$\underline{E} e^{i(kx_3 - \omega t)} = \underline{E} e^{i\omega(nx_3/c - t)} \ .$$

i) Das Material sei im ungespannten Zustand $O(2)$-invariant. Der Brechungsindex ändere sich linear mit der angewandten Spannung. Zeige: Er ändert sich von n_0 zu $\underline{n}$ gemäss

$$\underline{n} - n_0 \underline{1} = \alpha \underline{\hat{\sigma}} + \beta (\operatorname{tr} \sigma) \underline{1} \,,$$

wobei $\underline{\hat{\sigma}}$ der spurlose Anteil von $\underline{\sigma} = (\sigma_{ik})_{i,k=1,2}$ ist und α, β Materialkonstanten sind.

Hinweis: Die Herleitung ist der des Hookeschen Gesetzes (2.5) ähnlich. Die Gruppe $O(2)$ enthält auch Spiegelungen.

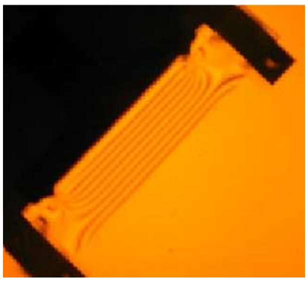
ii) Berechne die Matrix $\underline{M}$, welche die Beziehung $\underline{E}' = \underline{M}\underline{E}$ zwischen den Polarisationen $\underline{E}, \underline{E}'$ bei $x_3 = 0$, bzw. d angibt.

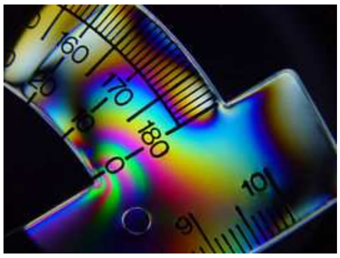
Hinweis: Führe die Rechnung im Hauptachsensystem von $\underline{\sigma}$ durch und verallgemeinere das Resultat danach. Gemeinsame Phasen beider Polarisationen können weggelassen werden, $\underline{M} \rightsquigarrow \underline{M} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, da für das Folgende unwesentlich.

iii) Das einfallende Licht ist mittels eines Filters linear polarisiert, das ausfallende wird mit einem dazu senkrechten Filter analysiert. Zeige: Es gibt zwei Sorten dunkler Streifen im Bild, und zwar:

- Isoklinen: Orte, wo die Hauptspannungsachsen wie die beiden Filter orientiert sind.
- Isochromaten: Orte konstanter Differenz der Hauptspannungen.

Bei Drehung des Filterpaars verändern sich folglich nur die Isoklinen. Bei Verwendung von weissem Licht sind die Isochromaten farbig (komplementär zu dem monochromatischen Licht, für welches sie dunkel sind; s. Figur rechts).





iv) Zwischen den Filtern werden zwei entgegengesetzte $\lambda/4$-Plättchen in den Lichtstrahl gelegt, und zwar eines auf jede Seite der Platte. Ein $\lambda/4$-Plättchen fügt eine relative Phase $\mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}/4} = \pm \mathrm{i}$ zwischen zwei ausgezeichneten linearen Polarisationen ein. Letztere sollen um 45° gegenüber dem Filterpaar gedreht sein. Zeige: Die Isochromaten bleiben, die Isoklinen werden unterdrückt.

Hinweis: Das Einfügen der Plättchen geht mit der Ersetzung $\underline{M} \rightsquigarrow \underline{U}_- \underline{M}\, \underline{U}_+$ einher, wobei $\underline{U}_\pm = \underline{U}_\mp^{-1}$ den beiden Plättchen entsprechen. Nach dem ersten Plättchen ist das Licht zirkular polarisiert.

Bildquellen: University of Cambridge, Wikipedia.