Lorentz Transformationen und Firmament

1. $SL(2,\mathbb{C}) \longleftrightarrow L_+^\uparrow$

$$M^4 \ni x = (x^0, \vec{x}) \longmapsto x^0 \sigma_0 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} \equiv x \cdot \sigma$$

$$= \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + i x^2 \\ x^1 - i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

wo $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Pauli Matrizen)

Dann gilt, dass

$$\det (x \cdot \sigma) = (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2} \tag{1}$$

Wenn $x \mapsto \tilde{x} = \Lambda x$, Λ eine Lorentz Transformation, dann folgt aus (1), dass

$$\det (\tilde{x} \cdot \sigma) = \det (x \cdot \sigma).$$

Wir suchen 2×2 Matrizen, A, so, dass

$$A\, x \cdot \sigma\, A^* = (\Lambda(A) x) \cdot \sigma, \tag{2}$$

wo $\Lambda(A)$ eine Lorentz Transformation ist. Es ist offensichtlich, dass

$$\Lambda(A_1) \Lambda(A_2) = \Lambda(A_1 \cdot A_2)$$

($\Lambda : A \mapsto \Lambda(A) \in L$ ist ein Homomorphismus!)

Da

$$|\det A|^2 \det(x\cdot\sigma) = \det(A\, x\cdot\sigma\, A^*)$$
$$= \det(\Lambda(A)x\cdot\sigma)$$
$$= \det(x\cdot\sigma)\,, \quad \forall x \in M^4,$$

folgt, dass $|\det A| = 1$. Eine Phase spielt in (2) keine Rolle. Darum können wir

$$\det A = 1$$

fordern, d.h. $A \in SL(2,\mathbb{C})$. Da $(\sigma_0, \vec{\sigma})$ eine Basis im Raum der <u>symmetrischen</u> 2×2 Matrizen ist, und da mit $x\cdot\sigma$ $(x \in M^4)$ auch $A\, x\cdot\sigma\, A^*$ symmetrisch ist, gibt es zu <u>jedem</u> $A \in SL(2,\mathbb{C})$ eine Lorentz Transformation $\Lambda(A)$. Ausserdem gilt, dass $\Lambda(A) = \Lambda(-A)$. Da $SL(2,\mathbb{C})$ zusammenhängend ist, gilt offenbar, dass $SL(2,\mathbb{C})$ eine zweifache Überlagerung von $L_+^\uparrow$ ist.

---

2. Spinoren

$\mathbb{C}^2 \ni z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ist der Raum der zweikomponentigen Spinoren. Die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ wirkt auf diesen Raum. Da für jedes $x \in M^4$ $x \cdot \sigma = (x \cdot \sigma)^*$ symmetrisch ist, gibt es einen Eigenspinor $z = z(x)$ ~~so, dass~~

$$(x \cdot \sigma) z = \lambda(x) z, \quad \lambda(x) \in \mathbb{R}.$$

Wenn $\det(x \cdot \sigma) = (x^0)^2 - |\vec{x}|^2 > 0$, dann haben beide Eigenwerte von $x \cdot \sigma$ das Vorzeichen von x^0.

Denn

$$(x \cdot \sigma) z = x^0 z + (\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) z \overset{!}{=} \lambda(x) z$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda(x) = x^0 \pm |\vec{x}| =: \lambda_\pm(x).$$

Wir studieren den Eigenspinor zum Eigenwert $\lambda_+(x)$. Es sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = |\vec{x}| \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$z(x) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}} \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\sin\varphi \\ 1-\cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad (3$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei haben wir $z(x)$ auf 1 normiert: $|z(x)| = 1$, wo $|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. (Man bemerke, dass $z(x) = z(\hat{x})$ nur vom Richtungsvektor

$$\hat{x} := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

abhängt!)

<u>Beweis von (3):</u> Es soll gelten, dass

$$(\hat{x}\cdot\vec{\sigma})\, z(x) \overset{!}{=} z(x);$$

(die Eigenwerte von $\hat{x}\cdot\vec{\sigma}$ sind ± 1). Also, da

$$\hat{x}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta, & \sin\vartheta\cos\varphi + i\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi - i\sin\vartheta\sin\varphi, & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

muss gelten, dass

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\, e^{i\varphi} \\ \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \cos\vartheta\, z_1 + \sin\vartheta\, e^{i\varphi} z_2 &= z_1 \\ \sin\vartheta\, e^{-i\varphi} z_1 - \cos\vartheta\, z_2 &= z_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Aus der ersten Gl. folgt, dass

$$z_1 = \frac{\sin\vartheta\, e^{i\varphi} z_2}{1-\cos\vartheta},$$

und die zweite Gl. gibt dann

$$\frac{\sin\vartheta\, e^{-i\varphi} \sin\vartheta\, e^{i\varphi} z_2}{1-\cos\vartheta} = (1+\cos\vartheta)\, z_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin^2\vartheta\, z_2 = (1-\cos^2\vartheta)\, z_2,$$

was richtig ist. Wir finden also, dass

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sin\vartheta\, e^{i\varphi}}{1-\cos\vartheta}, \qquad (5)$$

was von (3) offensichtlich erfüllt wird. Der Vorfaktor in (3) ergibt sich aus der Normierungsbedingung $|z(\hat{x})| = 1$.

Wir beachten nun, dass

$$w := \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sin\vartheta\, e^{i\varphi}}{1-\cos\vartheta} \qquad (6)$$

ein Punkt in der komplexen Zahlenebene ist, den man als stereographische Projektion eines Einheitsvektors, $\vec{n}$, auf der Riemannschen Sphäre (vom Nordpol, $\vec{n}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, aus) auffassen kann.

3. <u>Lemma.</u>

Für w wie in (6) gilt, dass

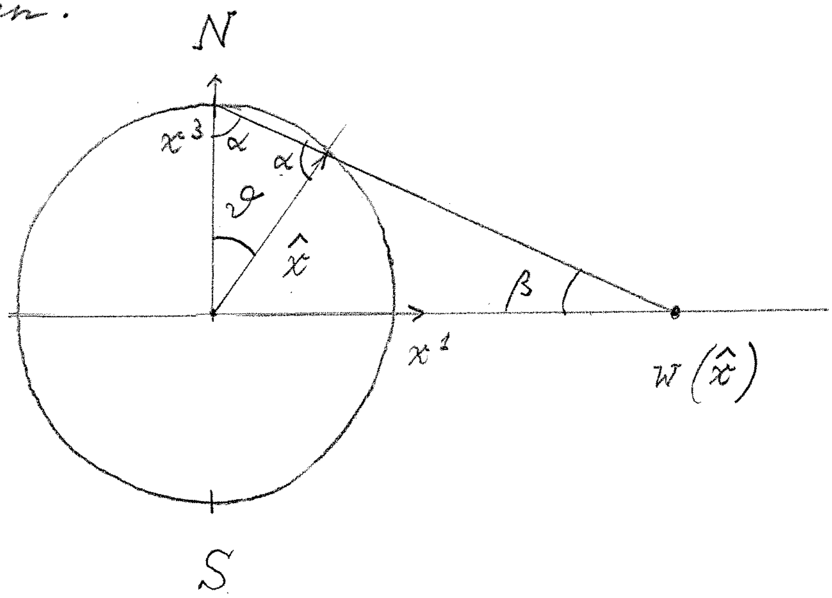
$$\vec{n} \equiv \vec{n}(w) = \hat{x}, \qquad (7)$$

und für $z(x) \equiv z(\hat{x})$ wie in (3) gilt

$$\left(z(\hat{x}), \vec{\sigma}\, z(\hat{x})\right) = \hat{x}. \qquad (8)$$

<u>Beweis.</u> Der Faktor $e^{i\varphi}$ in (6) entspricht einer Drehung in der komplexen w-Ebene um den Winkel φ. Unter der Inversen der stereographischen Projektion entspricht diese Drehung einer Drehung

der Riemannschen Sphäre mit Drehachse = Achse vom Südpol zum Nordpol und Drehwinkel φ. Es genügt daher, (7) im Spezialfall $\varphi = 0$ zu beweisen.



$$\alpha = \frac{\pi - \vartheta}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\vartheta}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = \tan\alpha = w(\hat{x}), \text{ also}$$

$$w(\hat{x}) = \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \quad . \tag{9}$$

Nun ist $\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$,

$$\cos\vartheta = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2$$

Daher $$\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} = \frac{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2} = \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} .$$

Es stimmt also (9) mit (6) (für $\varphi = 0$) überein, was (7) beweist.

Um (8) zu beweisen, entnehmen wir $z(\hat{x})$ der Formel (3) und erinnern daran, dass

$$(z, z') := \bar{z}_1 z_1' + \bar{z}_2 z_2' .$$

Dann finden wir, dass

$$\left(z(\hat{x}), \sigma_1 z(\hat{x})\right) = \left(\overline{z_1(\hat{x})}, \overline{z_2(\hat{x})}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\hat{x}) \\ z_2(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} \sin\vartheta = \hat{x}^1 \quad (\varphi = 0)$$

$$\left(z(\hat{x}), \sigma_2 z(\hat{x})\right) = 0 = \hat{x}^2 \quad (\varphi = 0), \text{ und}$$

$$\left(z(\hat{x}), \sigma_3 z(\hat{x})\right) = \frac{1}{2(1-\cos\vartheta)} \left(\sin\vartheta, 1-\cos\vartheta\right) \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -1+\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2(1-\cos\vartheta)} \left(\sin^2\vartheta - 1 + 2\cos\vartheta - \cos^2\vartheta\right)$$

$$= \cos\vartheta = \hat{x}^3 .$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

4. Lorentz Transformationen sind kreistreue Transformationen des Firmaments.

(i) Mit $\Lambda \in L$ ist auch $\Lambda^T \in L$.

Beweis. $\Lambda \in L \Leftrightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Also
$$\begin{aligned} \Lambda \eta \Lambda^T &= \Lambda \eta \Lambda^T \eta \Lambda \Lambda^{-1} \eta \qquad (\text{da } \eta^2 = \mathbb{1}) \\ &= \Lambda \eta^2 \Lambda^{-1} \eta \\ &= \eta, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(ii) Für einen lichtartigen Ko-Vektor

$$\xi := (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_0, \vec{x}),$$

mit $x_0 = |\vec{x}| > 0$, setzen wir

$$\zeta(\xi) := \sqrt{x^0}\, z(x) = \sqrt{x^0}\, z(\hat{x}) = \sqrt{|\vec{x}|}\, z(\hat{x}).$$

Da $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$, folgt dann aus (8), dass

$$(\zeta(\xi), \sigma_\mu \zeta(\xi)) = x_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Daher

$$(\zeta(\xi), y \cdot \sigma\, \zeta(\xi)) = \sum_{\mu=0}^{3} y^\mu x_\mu \equiv \langle y, \xi \rangle \qquad (10)$$

Also

$$(A^*\xi(\xi),\ y\cdot\sigma A^*\xi(\xi)) = (\xi(\xi), A(y\cdot\sigma)A^*\xi(\xi))$$

$$= (\xi(\xi), (\Lambda(A)y)\cdot\sigma\,\xi(\xi))$$

$$\overset{(10)}{=} \langle \Lambda(A)y, \xi\rangle = \langle y, \Lambda(A)^T\xi\rangle$$

$$\overset{(10)}{=} (\xi(\Lambda(A)^T\xi),\ y\cdot\sigma\,\xi(\Lambda(A)^T\xi)\rangle,$$

$\forall y$, $\forall$ lichtartigen Ko-Vektoren ξ. Daraus folgt, dass

$$A^*\xi(\xi) = e^{i\alpha}\,\xi(\Lambda(A)^T\xi), \qquad (11)$$

und die Phase $\alpha = \alpha(A)$ kann für $A \in SL(2,\mathbb{C})$ $= 1$ gesetzt werden. Zu $\xi = (x_0, \vec{x})$ gehört der Richtungsvektor $\hat{x}$; zu $\Lambda(A)^T\xi$ der Richtungsvektor $\hat{x}_{\Lambda(A)}$. Bildet man den Quotienten $w = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{z_1}{z_2}$, so entspricht der Transformation

$$\xi(\xi) \mapsto A^*\xi(\xi), \qquad A \in SL(2,\mathbb{C})$$

eine <u>Möbius Transformation</u> der komplexen w-

Ebene und die Transformation

$$\hat{x} \longmapsto \hat{x}_{\Lambda(A)}$$

der Riemannschen Sphäre der Richtungsvektoren, die man mit dem <u>Firmament</u> identifizieren soll. Da Möbius Transformationen gerade den <u>kreistreuen</u> Transformationen der Riemannschen Sphäre entsprechen haben wir offenbar bewiesen, dass <u>die eigentlichen orthochronen Lorentz Transformationen offenbar gerade den kreistreuen Abbildungen des Firmaments (ohne Raumspiegelung) entsprechen.</u>

Im Übrigen entspricht der Abbildung $\xi \mapsto \Lambda(A)^T \xi$ die Abbildung $x \mapsto \Lambda(A)^{-1} x$ des Vierervektors $x = \eta \xi$, da

$$\begin{aligned} x_A := \eta \Lambda(A)^T \xi &= \eta \Lambda(A)^T \eta x \\ &= \Lambda(A)^{-1} x \; ; \end{aligned}$$

denn

$$\eta \Lambda^T \eta \Lambda = \eta^2 = 1 \text{ ; also}$$

$$\eta \Lambda^T \eta = \Lambda^{-1} .$$

<u>Folgerung.</u> Ein kugelförmiger Stern erscheint auf dem Firmament eines <u>beliebig bewegten</u> Beobachters als <u>Kreisscheibe.</u>