ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Theoretische Physik
Serie 6

FS 2011
Prof. J. Fröhlich

Übung 6.1 Coulomb-Eichung und Kausalität

Zu einer gegebenen Ladungs- und Stromverteilung lassen sich $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld als Lösungen der Maxwell-Gleichungen mit Hilfe der Potentiale $\boldsymbol{A}$ und ϕ bestimmen.

a) Rekapituliere wie sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Gleichungen für $\boldsymbol{A}$ und ϕ übersetzen lassen (in Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$).

zeige, dass sich die Coulomb-Eichung durch eine geeignete Eichtransformation immer erfüllen lässt.

b) Zeige, dass in der Coulomb-Eichung für das Vektorpotential

$$\Box \boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}_t \tag{1}$$

gilt, wobei die Stromdichte $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_t + \boldsymbol{j}_l$ in einen transversalen Anteil mit $\nabla \cdot \boldsymbol{j}_t = 0$ und einen longitudinalen Anteil mit $\nabla \wedge \boldsymbol{j}_l = 0$ zerlegt werden kann. Wegen (1) nennt man die Coulomb-Eichung auch transversale Eichung.

c) Das Potential ϕ in der Coulomb-Eichung entspricht dem instantanen Coulomb-Potential der Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x}, t)$. Ist die Kausalität verletzt ?

d) Ein Beispiel für die Erhaltung der Kausalität und der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit trotz Verwendung der Coulomb-Eichung liefert eine Dipolquelle, die zur Zeit $t = 0$ ein- und ausgeschaltet wird. Die entsprechenden effektiven Ladungs- und Stromdichten sind

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x}, t) &= \delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t) \\ j_z(\boldsymbol{x}, t) &= -\frac{1}{c}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta'(t) \end{aligned}$$

wobei der Strich die Differentiation bezüglich des jeweiligen Arguments bezeichnet. Der beschriebene Dipol hat die Stärke eins, und sein Moment zeigt in negative z-Richtung.

Zeige, dass sich für das momentane Coulomb-Potential der explizit Ausdruck

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = -\delta(t)\frac{z}{4\pi r^3} \tag{2}$$

ergibt. Verwende, dass der transversale Strom $\boldsymbol{j}_t$ durch

$$\boldsymbol{j}_t(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{c}\delta'(t)\left[4\pi\delta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_z + \nabla\partial_z\frac{1}{r}\right] \tag{3}$$

gegeben ist und weise nach, dass das elektrische Feld kausal ist und folgende Komponenten hat :

$$\begin{aligned} E_x(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{c}{r}\left[-\delta''(r-ct) + \frac{3}{r}\delta'(r-ct) - \frac{3}{r^2}\delta(r-ct)\right]\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ E_y(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{c}{r}\left[-\delta''(r-ct) + \frac{3}{r}\delta'(r-ct) - \frac{3}{r^2}\delta(r-ct)\right]\sin\theta\cos\theta\sin\phi \\ E_y(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{c}{r}\left[\sin^2\theta\delta''(r-ct) + (3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{1}{r}\delta'(r-ct) - \frac{1}{r^2}\delta(r-ct)\right)\right]. \end{aligned}$$

Hinweis: Starte mit $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - 1/c\partial_t \boldsymbol{A}$. Es ist nicht notwendig $\boldsymbol{A}$ explizit auszurechnen; denke an die Greensche Funktion der Wellengleichung.

Übung 6.2 Teilchenspur kurzlebiger Teilchen in Blasenkammern

Ein Beschleuniger erzeuge einen Strahl von Müonen (Ruhemasse 105.7 MeV, mittlere Lebensdauer 2.2 10^{-6} s) mit einer Energie von 211.4 MeV pro Teilchen. Der erzeugte Strahl werde auf eine Blasenkammer gerichtet.
Berechne die mittlere Länge der Spur der Müonen in der Blasenkammer.

Übung 6.3 Transformation des Coulombfeldes

Berechne das $\boldsymbol{E}$ und das $\boldsymbol{B}$ Feld einer gleichgförmig bewegten Punktladung e der Geschwingikeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_1$, $(v < c)$. Verwende hierzu, dass die Potentiale A_μ die Lorentztransformierten der Potentiale $(A_\mu) = (\phi, 0, 0, 0)$ im Ruhesystem sind. Diskutiere für eine Zeit t die Geometrie der Flächen $|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)| =$ Konst.

Übung 6.4 Raketen*

a) Wir betrachten ein auf der Erde ruhendes Inertialsystem S. In diesem Inertialsystem habe eine Rakete vor dem Abschuss die Weltlinie $(t, x_0, 0, 0)$ für $t > 0$ und x_0 konstant. Bei $t = 0$ werde sie abgeschossen. Im Ruhesystem der Rakete sei die Beschleunigung konstant gleich $(g, 0, 0)$ bis zur Eigenzeit τ_0. Anschliessend wird der Motor abgestellt.

   Wie lautet die Bewegungsgleichung der Rakete im Inertialsystem S ? Wie sieht die Bahnkurve $x(\tau)$ bezüglich der Eigenzeit τ und $x(t)$ bezüglich der Zeit in S aus ?

b) Zwei in S zur Zeit $t = 0$ ruhende Raketen an den Raumpositionen $(x_0, 0, 0)$ und $(y_0, 0, 0)$, $(x_0 \neq y_0)$, seinen durch ein inelastisches Seil der Länge $l = |x_0 - y_0|$ (gemessen in S) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ starten beide Raketen mit derselben Beschleunigung g gemessen in ihrem Ruhesystem.

   Reisst das Seil ?

Übung 6.5 Maxwell-Gleichungen aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip*

So wie in der klassischen Mechanik die Bewegungsgleichungen von gewissen Systemen aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip herleiten lassen, lassen sich auch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen aus einem entsprechenden Variationsprinzip bestimmen. Für das 4er-Vektorpotential $A^\mu(x)$ wird die Wirkung wie folgt definiert:

$$\mathcal{S}[A^\mu] := -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu \right) \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Zeige, dass aus der Stationarität der Wirkung $(\delta\mathcal{S} = 0)$ unter Variationen $\delta A^\mu(x)$ mit kompakten Träger die inhomogenen Maxwell-Gleichungen folgen und dass die homogenen Maxwell-Gleichungen durch die Definition des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ trivial erfüllt sind. Weiterhin zeige, dass im speziellen Fall von Eichtransfromationen, also $\delta A_\mu(x) = -\partial_\mu \chi(x)$, aus $\delta\mathcal{S} = 0$ gerade die Stromerhaltung $\partial_\mu j^\mu = 0$ folgt.

Übung 6.6 Rotverschiebung und Lichtablenkung in Gravitationsfeld*