## Übung 2.1 Sphärisches Pendel

Betrachte einen Massenpunkt $m$ im Gravitationsfeld, der sich reibungslos auf der Fläche einer Kugel bewegt (das Radius ist $r$, das Azimutwinkel $\theta$ und das Polarwinkel $\phi$). Leite die Bewegungsgleichungen im Hamilton Formalismus her. Zeige, dass das System für kleine Winkel $\theta$ ein harmonischer Oszillator ist.

## Übung 2.2 Legendre Transformationen

Es sei $F$ eine konvexe Funktion (d.h. $-F$ konkav) über einer konvexen Menge $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$. Dann wird die Legendre-Transformierte $F^* \equiv \mathcal{L}F$ ($F^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) von $F$ durch

$$F^*(y) := \sup_{X\in\Gamma}\{X \cdot Y - F(X)\}$$

definiert.

a) Zeige, dass $F^*$ wieder konvex ist.

*Hinweise:* Für eine konvex Funktion $f$ über $\mathbb{R}$ gilt $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\lambda \in [0,1]$.

b) 1) Zeige geometrisch nun zuerst für $N = 1$ (d.h. man kann den Graph $z = F(X)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden), wenn $F$ strikte konvex und stetig differenzierbar ist, dass

$$F^*(Y) = Y \cdot X - F(X),$$

wo $Y = F'(X)$.

2) Zeige dies nun in N Dimensionen wo jetzt $Y = \mathrm{grad}F(X)$.
*Hinweise:* Sei der Graph von $F$ durch $\mathcal{G}_F := \{(X,z)|X \in \Gamma, z = F(X)\}$ gegeben. Dann ist die Variation $\mathcal{V} := (1, \mathrm{grad}F(X))dX$ und $\mathcal{G}_F$ hat in $X_0 \in \Gamma$ eine Tangentialebene, $T_{X_0}$, mit dem Normalenvektor $\mathcal{N} := (\mathrm{grad}F(X_0), -1)$ ($\mathcal{N} \perp \mathcal{V}$).

2) Was ist $\dfrac{\partial F^*}{\partial Y_j}(Y)$ ?

c) Zeige, wenn $F$ strikte konvex und stetig differenzierbar ist, dass die Legendre Transformation involutiv ist, d.h.

$$(F^*)^* = F.$$

## Übung 2.3 Lie' sche Ableitung

a) Wir haben gesehen, dass die Lie'sche Ableitung eines beliebigen Tensorfeldes $T \in \mathcal{T}^r_s(M) \equiv \Gamma(T^r_s M)$ wie folgt

$$\begin{aligned}(L_X T)(X_1, ..., X_s, \omega^1, ..., \omega^r) \;&:=\; X(T(X_1, ..., X_s, \omega^1, ..., \omega^r)) - \sum_{k=1}^{s} T(..., L_X X_k, ..., \omega^1, ..., \omega^r) \\ &- \sum_{l=1}^{r} T(X_1, ..., X_s, ..., L_X \omega^l, ...),\end{aligned}$$

definiert ist. Bestimme $L_X$ in einer lokalen Koordinatenbasis.

b) Die Lie'sche Ableitung hat die folgenden Eigenschaften :

1) $L_X : \mathcal{T}_r^s(M) \to \mathcal{T}_r^s(M)$ ist $\mathbb{R}$-linear, (aber nicht $C^\infty(M)$-linear).
2) $L_X(T \otimes S) = (L_X T) \otimes S + T \otimes (L_X S)$ (Leibnitz).
3) $L_X$ vertauscht mit Kontraktion.
4) $L_X f = X(f) = df(X)$, für $f \in C^\infty(M)$.
5) $L_X Y = [X, Y]$, $Y \in TM$.
6) $L_X \omega(\cdot) = X(\omega(\cdot)) - \omega([X, \cdot])$.
7) $L_{\lambda X + \mu Y} = \lambda L_X + \mu L_Y$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in TM$.
8) $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.

Wähle vier Beziehungen (ausser 7) und 8)) und zeige, dass sie gelten.

### Übung 2.4 Äussere Ableitung

Sei $\alpha \in \Omega^r(N)$ eine $r$-Form auf $N$ und $\varphi : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeige, dass

$$d(\varphi^* \alpha)(x) = \varphi^* d\alpha(x).$$

*Hinweise:* Man benütze, dass $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}$.

*Korollar:* $dL_X = L_X d$.

### Übung 2.5 Krummlinige Koordinaten

Liese das Zusatzskript zur krummlinigen Koordinaten und schreibe eine einseitige Zusammenfassung.