

Bemerkung. Die Darstellungen  $D_j$  von  $SU(2)$  haben folgende Eigenschaft, die man unmittelbar aus der Definition entnimmt:

$$D_j(-\mathbb{1}) = (-1)^{2j} \mathbb{1}, \tag{30}$$

also: ganzzahlige  $j$  gehören zu eindeutigen, halbzahlige  $j$  zu zweideutigen Darstellungen der  $SO(3)$ .

v) Die Clebsch - Gordan Reihe der  $SU(2)$ .

$$\chi_j(U(\alpha)) = \sum_{m=-j}^j e^{2im\alpha} = \frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

Betrachten die Tensorprodukt darstellung  $D_{j_1} \otimes D_{j_2}$

auf  $D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ , was physikalisch der Zusammensetzung eines g.m. Systems (Teilchen) mit Spin  $j_1$  mit einem System des Spins  $j_2$  entspricht. Wir fragen: Welche möglichen Spinwerte hat das Gesamtsystem? (Zusammen-

setzung quantenmechanischer Drehimpulse!)

Diese Frage kann man leicht mit Hilfe der Charaktere beantworten.

Direkt aus der Definition der Charaktere und des Tensorproduktes folgt, dass

$$\chi_{j_1 \otimes j_2}(U) = \chi_{j_1}(U) \chi_{j_2}(U). \quad (31)$$

Sei  $N_{j_1 j_2}^j$  die Multiplizität der Darstellung  $D_j$

als Unterdarstellung von  $D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ , d.h.

$$D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_j D_j \otimes \mathbb{C}^{N_{j_1 j_2}^j}, \quad (32)$$

mit  $\mathbb{C}^0 = \emptyset$ . Aus den Formeln (63), (64) und

(65) des letzten Abschnitts folgt, dass

$$\chi_{j_1 \otimes j_2}(U) = \chi_{j_1}(U) \chi_{j_2}(U) = \sum_j N_{j_1 j_2}^j \chi_j(U). \quad (33)$$

(Die Formeln (31) - (33) können leicht auf allgemeine kompakte Gruppen verallgemeinert werden!) Nun gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{j_1}(U(\alpha)) \chi_{j_2}(U(\alpha)) &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{i(m_1+m_2)\alpha} \\ &= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j e^{im\alpha} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_j(U(\alpha)) \end{aligned} \quad (34)$$

Diese Gleichung soll in den Übungen gezeigt werden.

Daraus folgt:

$$N_{j_1 j_2}^j = \begin{cases} 1, & |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also

$$D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D_j \quad (35)$$

Diese Gl. nennt man die Clebsch - Gordan Reihe für  $SU(2)$ .

### 6.5 Infinitesimale Methode: Irreduzible Darstellungen von $su(2)$ .

Wenn  $G$  eine einfach zusammenhängende, kompakte Lie'sche Gruppe ist, dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Irreduzible Darstellungen} \\ \text{von } G \end{array} \right\} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{Irreduzible Darstellungen} \\ \text{von } \mathfrak{g} = \text{Lie}(G). \end{array} \right.$$

Da  $G$  kompakt ist, ist jede irreduzible Darstellung  $D$  von  $G$  unitär und daher, wegen

$$dD(X) = \left. \frac{d}{ds} D(\exp sX) \right|_{s=0}, \quad X \in \mathfrak{g},$$

jede Darstellung von  $\mathfrak{g}$  eine Darstellung durch

antihermite'sche Matrizen, d. h.

$$(id D(X))^* = id D(X) \quad (36)$$

Sei nun  $\rho$  eine antihermite'sche Darstellung von  $su(2)$  auf einem VR,  $V$ , mit Skalarprodukt.

Offensichtlich können wir  $\rho$  komplex-linear auf die Lie algebra  $sl_2(\mathbb{C})$  der spurfreien  $2 \times 2$  Matrizen ausdehnen. Wir definieren nun

$$J_\alpha := \frac{1}{\hbar} \rho\left(\frac{1}{2} \sigma_\alpha\right), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (37)$$

$$J_\pm := J_1 \pm i J_2 \in \rho(sl_2(\mathbb{C})), \quad (38)$$

Da  $\rho$  eine Darstellung von  $su(2)$  ist, gelten die Vertauschungsrelationen

$$[J_k, J_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} J_m, \quad (39)$$

also auch

$$[J_3, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm \quad \left. \vphantom{[J_3, J_\pm]} \right\} (40)$$

und

$$[J_+, J_-] = -2i [J_1, J_2] = 2\hbar J_3.$$

Statt dass wir, wie in der globalen Methode, alle irreduziblen (unitären) Darstellungen von  $SU(2)$  bestimmen, wollen wir nun direkt alle antihermiteschen, irreduziblen Darstellungen von  $su(2)$ , d. h. alle Darstellungen von (40), mit

$$J_3^* = J_3 \quad \text{und} \quad J_{\pm}^* = J_{\mp}, \quad (41)$$

bestimmen. Im folgenden setzen wir  $\hbar = 1$ .

Sei  $\psi_m \in V$  ein Eigenvektor von  $J_3 = \rho\left(\frac{1}{2}\sigma_3\right)$

zum Eigenwert  $m$ . Da  $e^{2\pi i J_3} = \rho(-1) = \pm 1$ ,

folgt, dass

$$m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}. \quad (42)$$

Weiter folgt aus (40), dass

$$\begin{aligned} J_3(J_{\pm}\psi_m) &= [J_3, J_{\pm}]\psi_m + J_{\pm}J_3\psi_m \\ &\stackrel{(40)}{=} (m \pm 1)J_{\pm}\psi_m \end{aligned} \quad (43)$$

Wegen (41) haben wir, dass

$$\langle \psi, J_{\pm}J_{\mp}\psi \rangle = \langle J_{\mp}\psi, J_{\mp}\psi \rangle \geq 0,$$

$\forall \psi \in V$ . Wir nennen den maximalen Eigenwert

von  $J_3$   $j$  und einen zugehörigen Eigenvektor  $\psi_j$ .

Da alle irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{su}(2)$  endlich-dimensional sind, ist  $j < \infty$ . Wegen (43) gilt  $J_+ \psi_j = 0$ , also auch

$$J_- J_+ \psi_j = 0. \quad (44)$$

Nun gilt aber, dass

$$J_- J_+ = J_1^2 + J_2^2 + i[J_1, J_2] \stackrel{(39)}{=} \vec{J}^2 - J_3^2 - J_3, \quad (45)$$

und daher, mit (44),

$$\vec{J}^2 \psi_j = (J_- J_+ + J_3^2 + J_3) \psi_j = j(j+1) \psi_j. \quad (46)$$

Wir normieren  $\psi_j$  so, dass  $\|\psi_j\| = 1$ , und definieren

$$r_m \psi_{m-1} := J_- \psi_m, \quad m = j, j-1, \dots, \quad (47)$$

wo die Zahlen  $r_m$  so gewählt sind, dass  $\|\psi_m\| = 1$ ,

oder  $= 0$ ,  $\forall m < j$ .

Da  $\vec{J}^2$  mit  $J_-$  vertauscht, finden wir aus

(46) und (47), dass

$$\vec{J}^2 \psi_m = j(j+1) \psi_m, \quad \forall m \leq j. \quad (48)$$

Da  $J_3 \psi_m = m \psi_m$  und  $J_3^* = J_3$ , folgt

$$\langle \psi_m, \psi_{m'} \rangle = 0, \quad \text{für } m \neq m'. \quad (49)$$

Da  $\rho$  endlich-dimensional ist, gibt es ein  $m_-$  so,  
dass

$$J_- \psi_{m_-} = 0,$$

also

$$J_+ J_- \psi_{m_-} = 0. \quad (50)$$

Da

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_3^2 + J_3 \quad (51)$$

und wegen (48), folgt, dass

$$j(j+1)\psi_{m_-} = \vec{J}^2 \psi_{m_-} = J_3 (J_3 - 1) \psi_{m_-}$$

↑  
(50), (51)

$$= m_-(m_- - 1) \psi_{m_-}. \quad (52)$$

Also  $m_- = -j$ , oder  $m_- = j+1$ . Aber da

$m_{\max.} = j$ , folgt

$$m_- = -j. \quad (53)$$

[Umgekehrt gilt für  $\psi_{-j}$

$$\|J_- \psi_{-j}\|^2 = \langle \psi_{-j}, J_+ J_- \psi_{-j} \rangle$$

$$\stackrel{(51)}{=} \langle \psi_{-j}, [j(j+1) - j^2 - j] \psi_{-j} \rangle = 0.]$$

Nun berechnen wir die Normierungskonstanten  $r_m$ :

$$|r_m|^2 = \|J_- \psi_m\|^2 = \langle \psi_m, J_+ J_- \psi_m \rangle$$

$$(51) \quad = [j(j+1) + m - m^2] \underbrace{\|\psi_m\|^2}_{=1}, \text{ d.h.}$$

$$\boxed{r_m = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}} \quad (54)$$

Also

$$J_- \psi_m = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \psi_{m-1} \quad (55)$$

und, mit  $J_+ = J_-^*$ , folgt dann

$$J_+ \psi_m = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \psi_{m+1}, \quad (56)$$

was wir schon in (29) gefunden hatten.

Der von den Vektoren  $\{\psi_m \equiv e_m^j\}_{m=-j}^j$  aufgespannte  
Unterraum  $V_0$  von  $V$  ist offensichtlich invariant

unter der Darstellung  $\rho$  von  $\mathfrak{su}(2)$  und enthält  
keine nicht-trivialen, invarianten Unterräume. Wenn  
 $\rho$  irreduzibel ist, folgt also

$$V_0 = V,$$

d.h. der sog. höchste Gewichtsvektor  $\psi_j \in V$   
ist eindeutig (bis auf eine Phase).

Nun sieht man leicht, dass die eben beschriebene



Darstellung  $\rho = \rho_j$  von  $su(2)$  zu einer Darstellung,  $D$ , von  $SU(2)$  integriert werden kann:

$$D(U = \exp i \frac{\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{G}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^N}{N!} \rho_j(\vec{n} \cdot \vec{J})^N. \quad (57)$$

Für  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\theta = 2\alpha$  finden wir  $U = U(\alpha)$ ,

$\vec{n} \cdot \vec{J} = J_3$ , und daher, mit  $J_3 \psi_m = m \psi_m$

$$\text{Sp} D(U(\alpha)) = \sum_{m=-j}^j e^{2im\alpha} = \chi_j(U(\alpha)). \quad (58)$$

Damit folgt

$$D = D_j, \quad \rho_j = dD_j. \quad (59)$$

## 6.6 Teilchen mit Spin und Pauli Gleichung.

Mit Hilfe der Darstellungstheorie der  $SU(2)$  ist es nun einfach, Teilchen mit innerem Drehimpuls, oder Spin, quantenmechanisch zu beschreiben. Auf die Existenz eines inneren Freiheitsgrades für Elektronen, den wir mit dem Spin identifizieren werden, hat schon

früh die Untersuchung der Alkali-Spektren hingewiesen

Ausser für den Bahndrehimpuls  $l=0$  des Leuchtelektrons (in der äussersten Schale) bestehen nämlich alle Terme für  $l \geq 1$  aus zwei dicht beieinander liegenden Spektrallinien. Dieser Befund hat Pauli dazu

veranlasst, dem Elektron einen zweiwertigen, inneren Freiheitsgrad zuzuschreiben. Von Goudsmit und

Uhlenbeck (1925) stammt die Idee, dass ein Elektron, wie auch viele andere Elementarteilchen, einen inneren

Drehimpuls hat. Das von ihnen dieser Auffassung zu Grunde gelegte mechanistische Modell eines Elektrons ist

allerdings unhaltbar. Die korrekte gruppentheoretische Formulierung des Spins und dessen Zusammenhang mit der Drehgruppe stammt von Pauli (1927).

Ein direkter Nachweis der Existenz des Spins von Elektronen und Atomen gelang im Stern-Gerlach

Versuch (1922), ursprünglich für einen Strahl von

Natrium Atomen. Diesen Versuch werden wir später besprechen.

Wir wollen nun nicht-relativistische Teilchen mit beliebigem Spin quantenmechanisch-gruppentheoretisch beschreiben. Wir kennen schon

Spinlose Teilchen ( $s=0$ ): Der Zustand,  $\psi$ , eines spinlosen Teilchens wird durch eine skalare Wellenfunktion  $\psi(\vec{x})$  beschrieben, wo  $\psi(\vec{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ ,  $\|\psi\|_2 = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = 1$ . Ihre Transformationseigenschaften unter Drehungen des Raumes werden durch die Darstellung

$$(U(R)\psi)(\vec{x}) \equiv \psi_R(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}), \quad (60)$$

$$R \in SO(3) \quad (R^{-1} = R^T),$$

beschrieben. Die Darstellung  $U$  ist nicht irreduzibel.

Tatsächlich ist

$$U = \bigoplus_{l=0}^{\infty} D_l \otimes \mathbb{1} \Big|_{L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)}. \quad (61)$$

Der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$  hat die Tensorproduktzerlegung

$$L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) = L^2(S^2, d\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr), \quad (62)$$

wo

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

in sphärischen Polarkoordinaten. Nun ist

$$U = \tilde{U} \otimes \mathbb{1}, \quad (63)$$

denn die radialen Wellenfunktionen transformieren trivial unter Raumdrehungen.

Die Kugelfunktionen  $\{Y_m^l(\theta, \varphi)\}_{m=-l, l=0, 1, 2, \dots}^l$

bilden ein VONS in  $L^2(S^2, d\Omega)$ . Wir behaupten

nun, dass der durch die Funktionen  $\{Y_m^l\}_{m=-l}^l$

aufgespannte Unterraum  $\mathcal{D}_l$  gerade die Darstel-

lung  $\mathcal{D}_l$  trägt, so dass  $\tilde{U} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{D}_l$ . Statt dass

wir zum Beweis auf unsere Konstruktion der Kugel-

funktionen zurück kehren, konstruieren wir diese gleich

noch einmal neu, nämlich gruppentheoretisch: In

Polarkoordinaten sind die Komponenten des Bahndreh-

impulsoperators  $\vec{L} = \frac{1}{i} \vec{x} \wedge \vec{v}$  ( $\hbar = 1!$ ) durch die folgenden Ausdrücke gegeben, (Übungen zu Kap. 3)

$$L_z = \frac{1}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (64)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \frac{1}{i} e^{\pm i\varphi} \left[ \pm i \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

Wie wir wissen, haben die Kugelfunktionen die Form

$$Y_m^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_m^l(\theta),$$

$Y_m^l$  ist also eine Eigenfunktion von  $L_z$  zum Eigenwert  $m$ . Für  $Y_l^l$  soll nun gelten, dass

$L_+ Y_l^l = 0$ , also

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right] P_l^l(\theta) = 0, \quad (65)$$

mit der Lösung

$$P_l^l(\theta) = \frac{(-1)^l}{2^{l+\frac{1}{2}} l!} \sqrt{(2l+1)!} (\sin \theta)^l,$$

wobei die Normierungskonstante so gewählt ist, dass

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta |P_l^l(\theta)|^2 = 1,$$

und die Phase  $(-1)^l$  konventionell ist.

Nun kann man auf Grund der Darstellungstheorie der  $SU(2)$  rekursiv definieren:

$$L_- Y_m^l(\theta, \varphi) = \sqrt{(l+m)(l-m+1)} Y_{m-1}^l(\theta, \varphi), \quad (66)$$

siehe Formel (56). Daraus folgt die Formel für die Kugelfunktionen

$$Y_m^l(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi (l-m)!}} e^{im\varphi} \frac{1}{(\sin\theta)^m} \times \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m} (\sin\theta)^{2l} \quad (67)$$

Es folgt automatisch, dass  $L_- Y_{-l}^l = 0$ ,  $Y_m^l = 0$ ,

$\forall m < -l$ . Der Charakter von  $\tilde{V}/D_l$  ist durch

$$\text{Sp}_{D_l}(\tilde{V}(\alpha)) = \frac{\sin(2j+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

gegeben, d.h.  $\tilde{V}/D_l \cong D_l$ .

Nun betrachten wir Teilchen mit Spin. Sei  $\mathcal{H}$

der Hilbertraum der reinen Zustandsvektoren

für ein Teilchen mit Spin. Alles, was wir wissen,

ist, dass  $\mathcal{H}$  eine projektive Darstellung der Drehgruppe  $SO(3)$  trägt, die von einer unitären Darstel-

lung von  $SU(2)$  kommt, jedoch ein- oder zweiwertig sein kann. Wir machen für die Zustandsvektoren in  $\mathcal{H}$  den Ansatz

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \psi_{2s+1}(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \psi_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x), \quad (68)$$

d.h.

$$\psi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}, \quad (69)$$

mit

$$\|\psi\|_2^2 := \sum_{\alpha=1}^{2s+1} \|\psi_\alpha\|_2^2 = 1.$$

Die Transformationseigenschaften unter Drehungen des Raumes sollen durch

$$(U(R)\psi)(\vec{x}) \equiv \psi_R(\vec{x}) := D_s(R)\psi(R^{-1}\vec{x}) \quad (70)$$

gegeben sein, wo  $D_s(R_1)D_s(R_2) = \pm D_s(R_1 \cdot R_2)$ , für

$R_1, R_2 \in SO(3)$ , und  $D_s$  die Darstellung von  $SU(2)$

auf  $\mathcal{D}_s$ , (Spin  $s$ ), ist. Der Hilbertraum  $\mathcal{H}$  hat

die Tensorprodukt darstellung

$$\mathcal{H} = L^2(S^2, d\Omega) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}, \quad (71)$$

und

$$U = \tilde{U} \otimes \mathbb{1} \otimes D_s.$$

Wir ignorieren nun die radialen Wellenfunktionen, die hier keine Rolle spielen. Auf dem Unterraum

$$D_l \otimes \mathbb{C}^{2s+1}, \quad D_l = \mathcal{L} \left\{ Y_m^l \right\}_{m=-l}^l, \quad \text{reduziert sich}$$

$U$  zur Darstellung  $D_l \otimes D_s$ . Im Gegensatz zum

Falle der spinlosen Teilchen, ist diese nicht irreduzibel, sondern spaltet in eine direkte Summe irredu-

zibler Darstellungen auf (Clebsch-Gordan Reihe)

$$D_l \otimes D_s = \bigoplus_{j=|l-s|}^{l+s} D_j, \quad (72)$$

wo  $j$  der totale Drehimpuls des Teilchens ist.

Die mit der Tensorprodukt darstellung  $\tilde{U} \otimes D_s$  von  $SU(2)$  verbundene Darstellung der Drehimpulsalgebra hat die Generatoren  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ , wo

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}, \quad (73)$$

$\vec{L}$ , der Bahndrehimpuls, durch (64) und  $\vec{S}$ , der Spin, durch

$$\vec{S} = dD_s \left( \frac{1}{2} \vec{e} \right) \quad (74)$$



gegeben sind; siehe Abschnitt 5.3, Gl. (56), und Abschnitt 5.4, Gl. (27).

Falls  $SU(2)$  für ein solches System eine dynamische Symmetrie ist, so sind  $\vec{J}^2$  und

$J_z \equiv J_3$  Erhaltungsgrößen, die mit dem Hamiltonoperator  $H$  vertauschen, nicht aber i. A.  $\vec{L}, L_z$  oder  $\vec{S}^2, S_z$ ; (Spin-Bahn Kopplung!).

Aus der zweifachen Aufspaltung der Terme der Alkali Spektren (für  $l \neq 0$ ) kann man vermuten, dass ein Elektron den Spin  $s = 1/2$  hat. Dies entspricht dem Clebsch-Gordan Reihen:

$$\left. \begin{aligned} D_l \otimes D_{s=1/2} &= D_{l-1/2} \oplus D_{l+1/2}, \quad l \neq 0 \\ D_0 \otimes D_{1/2} &= D_{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Offenbar vertauscht der Hamiltonoperator eines Alkali-Atoms nicht getrennt mit  $\vec{L}^2$  und  $\vec{S}^2$ , sondern nur mit  $\vec{J}^2$ , was der Tatsache entspricht, dass die zu  $D_{l-1/2}$  und  $D_{l+1/2}$  gehörigen Energie-

niveaux nicht entartet sind. Dies ist eine Folge der Spin-Bahn Kopplung, die einem Term

$$V_{SL} = A \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (76)$$

im Hamiltonoperator entspricht.

Für die Wellenfunktionen der Elektronen benützt wir die Notation

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi^+(\vec{x}) \\ \psi^-(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\vec{x}) \\ \psi_{\downarrow}(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

mit

$$S_3 \psi(\vec{x}) = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \psi(\vec{x}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\vec{x}) \\ -\psi_{\downarrow}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

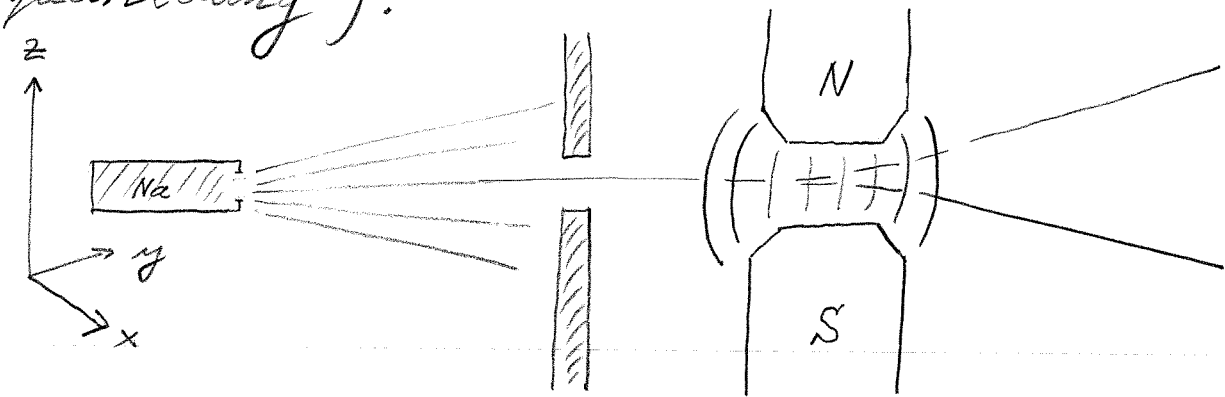
Als Interpretation bietet sich an:

$$\begin{aligned} |\psi^{\pm}(\vec{x})|^2 &= \text{W. keits dichte für ein Teilchen im} \\ &\text{Punkt } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } z\text{-Komponente des} \\ &\text{Spins} = \pm \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (77)$$

Ein direkter experimenteller Nachweis des Elektronenspins geschieht im Stern-Geblach Experiment.

Wie wir später verstehen werden, hat ein Natriumatom im Grundzustand den inneren Drehimpuls  $s = \frac{1}{2}$ , der vom Spin des Leuchtelektrons in der

äußersten Schale herührt, also direkt mit dem Elektronenspin zusammenhängt. Stern und Gerlach führten einen Strahl von Natrium Atomen durch ein inhomogenes Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x})$ . Der Strahl spaltete sich in zwei Teilstrahlen auf, ("Richtungsquantelung"):



Erklärung: Klassisch wirkt auf ein magnetisches Moment  $\vec{m}$  in einem inhomogenen Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  die Kraft  $\vec{K}(\vec{x}) = \nabla (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x}))$ . Die Aufspaltung des Natriumstrahles könnte also eine Folge davon sein, dass Natriumatome ein magnetisches Moment tragen, das vom magnetischen Moment des Lichtelektrons kommt. Auf Grund der klassischen Physik würde man erwarten, dass  $\vec{m}$  proportional zum inne-

ren Drehimpuls,  $\vec{S}$ , ist, d.h.

$$\vec{m} = g \mu_B \frac{1}{\hbar} \vec{S} \quad (78)$$

wo  $\mu_B = e\hbar/2m_e c$  das Bohr'sche Magneton

bedeutet ( $e < 0$ : Ladung des Elektrons,  $m_e$ : Masse

des Elektrons) und  $g$  der gyromagnetische Faktor

ist. Klassisch würde man erwarten, dass  $g = 1$ .

Gemessen wird  $g = 2.0033$ . Da  $\vec{S}$  in der Quanten-

mechanik ein Operator ist, ist offenbar auch  $\vec{m}$

ein Operator. Die Kraft  $\vec{K}(\vec{x}) = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x}))$

leitet sich von einem "Potential",  $-\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x})$ , ab.

Offenbar muss der Hamiltonoperator eines Elektrons

(oder eines Natrium Atoms) im Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  von

der Form

$$H = H_0 - \vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = H_0 - g \mu_B \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{x}) \quad (79)$$

sein, wo  $H_0$  mit  $\vec{\sigma}$  vertauschen soll. Der Term  $-\vec{m} \cdot \vec{B}$

ist die Zeeman Energie. Da das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x})$  in

$z$ -Richtung steht, sind die Unterräume

$$\mathcal{H}_{\pm} = \{ \psi : \psi^{\mp}(\vec{x}) = 0 \}$$

invariant unter der Zeitrevolution, d.h. die Projektionen auf  $\mathcal{H}_{\pm}$  vertauschen mit  $e^{-itH/\hbar}$ , oder, in anderen Worten,  $m_3$  ist eine Erhaltungsgrösse. Das

Zentrum,  $\vec{x}_{\pm}$ , eines "gepackten" Wellenpaketes  $\psi_{\pm}$  genügt nach dem Ehrenfest'schen Theorem näherungsweise der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\vec{x}}_{\pm} \approx \vec{F}(\vec{x}_{\pm}) \pm \frac{g\mu_B}{2} (\vec{\nabla} B_3)(\vec{x}_{\pm}), \quad (80)$$

wo  $\vec{F}$  spinunabhängig ist. Daher geht ein

Anfangszustand  $\psi_{in} = \begin{pmatrix} \psi_{in}^+ \\ \psi_{in}^- \end{pmatrix}$  mit  $|\psi_{in}^+(\vec{x})| \approx$

$\lambda |\psi_{in}^-(\vec{x})|$  in einem inhomogenen  $\vec{B}$ -Feld in

$z$ -Richtung in einen Zustand  $\psi_{out} = \begin{pmatrix} \psi_{out}^+ \\ \psi_{out}^- \end{pmatrix}$

über mit der Eigenschaft, dass die Träger von

$\psi_{out}^+$  und  $\psi_{out}^-$  näherungsweise disjunkt sind,

d.h. der Strahl spaltet in zwei Teilstrahlen auf,

und  $\|\psi_{out}^+\|_2^2 \approx \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$ ,  $\|\psi_{out}^-\|_2^2 \approx \frac{1}{1+\lambda^2}$ ,

(was die Intensitäten der zwei Teilstrahlen an-  
gibt). Unterwirft man nun die zwei Teilstrahlen  
einem weiteren  $\vec{B}$ -Feld in  $z$ -Richtung, so ist  
keine weitere Aufspaltung zu beobachten. Treten  
sie jedoch in ein inhomogenes  $\vec{B}$ -Feld in  $x$ -  
Richtung ein, so spaltet jeder Teilstrahl in  
zwei weitere Teilstrahlen gleicher Intensität  
auf. Denn

$$\begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ -\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ -\psi \end{pmatrix}$$

$$\text{und } S_x \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad S_x \begin{pmatrix} \psi \\ -\psi \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ -\psi \end{pmatrix}.$$

Mit analogen Überlegungen überzeugt man sich,  
dass ein Strahl neutraler Teilchen vom Spin  $s$   
mit magnetischem Moment sich beim Durchlaufen  
eines inhomogenen  $\vec{B}$ -Feldes in  $2s+1$  Teil-  
strahlen aufspaltet. Im Limes  $s \rightarrow \infty$  findet man die  
klassische Verteilung.

Wie kann man den gyromagnetischen Faktor  $g$

bestimmen? Eine mögliche Methode dazu ist

die Bloch'sche Spin Resonanz, die durch die Nobelpreise von R. Ernst und K. Wüthrich wieder ins Gespräch gekommen ist, und die wir kurz diskutieren wollen.

Wir betrachten ein einzelnes Elektron unter dem Einfluss eines räumlich konstanten, aber zeitabhängigen Magnetfeldes

$$\vec{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, B_0), \quad (81)$$

das offenbar um die  $z$ -Achse rotiert. Der Hilbertraum dieses Systems ist

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^2, \quad (82)$$

der (zeitabhängige!) Hamiltonoperator ist, wie in (79) angenommen,

$$H(t) = H_0(t) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_1(t), \quad (83)$$

wo

$$\begin{aligned} H_1(t) &= -\frac{g\mu_B}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(t) \\ &= -\hbar \omega_0 \frac{\sigma_3}{2} - \hbar \omega_1 \left[ \cos(\omega t) \frac{\sigma_1}{2} - \sin(\omega t) \frac{\sigma_2}{2} \right], \end{aligned} \quad (84)$$

mit  $\omega_0 = \frac{g\mu_B B_0}{\hbar}$  und  $\omega_1 = \frac{g\mu_B B_1}{\hbar}$ .

Die Schrödinger-Pauli Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = H(t) \psi_t$$

hat die Lösung

$$\psi_t = (V(t,0) \otimes U(t,0)) \psi_0, \quad (85)$$

wo  $V(t,0)$  der Propagator auf  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$  zum Hamiltonoperator  $H_0(t)$  ist (und  $V(t,0) = \exp(-itH_0/\hbar)$ , falls  $H_0$  zeitunabhängig ist), und  $U(t,0)$ , der Propagator auf

$\mathbb{C}^2$ , die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,0) = H_1(t) U(t,0) \quad (86)$$

erfüllt, mit  $U(t,s) = U(t,0)U(s,0)^{-1}$ ,  $U(s,s) = \mathbb{1}$ . Die

Gleichung (86) hat die Lösung

$$U(t,0) = e^{it\omega\sigma_3/2} e^{it[(\omega_0-\omega)\sigma_3 + \omega_1\sigma_1]/2}, \quad (87)$$

was wir nun durch Nachrechnen beweisen: Sei  $U(t,0)$  durch die rechte Seite von (87) definiert. Dann haben wir, dass

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,0) &= -(\hbar\omega\sigma_3/2) U(t,0) \\ &\quad - e^{it\omega\sigma_3/2} \frac{\hbar}{2} [(\omega_0-\omega)\sigma_3 + \omega_1\sigma_1] e^{it[(\dots)\sigma_3 + \omega_1\sigma_1]/2} \\ &= -(\hbar\omega_0\sigma_3/2) U(t,0) - \frac{\hbar\omega_1}{2} (e^{it\omega\sigma_3/2} \sigma_1 e^{-it\omega\sigma_3/2}) \\ &\quad \times U(t,0) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left[ -\frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_3 - \hbar \omega_1 \cos \omega t \sigma_1 + \hbar \omega_1 \sin \omega t \sigma_2 \right] U(t, 0) \\
 &= H_1(t) U(t, 0), \quad \text{was zu beweisen war!}
 \end{aligned}$$

In der zweitletzten Gleichung haben wir benutzt,

dass

$$\begin{aligned}
 e^{it \frac{\omega \sigma_3}{2}} \sigma_1 e^{-it \frac{\omega \sigma_3}{2}} &= \left( \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \sigma_3 \right) \sigma_1 \\
 &\quad \times \left( \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \sigma_3 \right) \\
 &= \underbrace{\left( \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right)}_{\cos(\omega t)} \sigma_1 - \underbrace{2 \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}_{\sin(\omega t)} \sigma_2,
 \end{aligned}$$

in der letzten Gleichung haben wir (84) eingesetzt.

Aus der Gl. (87) für den Propagator  $U(t, 0)$  lässt sich die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, dass der Spin eines Elektrons zur Zeit  $t$  umgeklappt ist, wenn er zur Zeit  $t=0$  in  $(+z)$ -Richtung war:

$$P_{\text{flip}}(t) = \left| U(t, 0)_{-+} \right|^2 = \frac{\omega_1^2}{2\Omega^2} (1 - \cos \Omega t), \quad (88)$$

wo  $\Omega = [(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2]^{1/2}$ . Es folgt, dass

$$\max_t P_{\text{flip}}(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \leq 1, \quad (89)$$

und Resonanz tritt auf, d. h.  $\max_t P_{\text{flip}}(\pm) = 1$ , falls

$$\omega_0 = \omega, \quad \text{d. h.} \quad \frac{g\mu_B B_0}{\hbar} = \omega. \quad (90)$$

Diese Gl. zeigt, dass sich  $g$  aus der Beobachtung von Spinresonanz durch Messung von  $\omega$  bestimmen lässt.

Die Schrödingergleichung,  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = H \psi_t$ , mit  $H$  e.g. wie in (79), für Teilchen mit Spin wurde zuerst von Pauli gefunden. Betrachten wir ein Teilchen mit Masse  $m$ , elektrischer Ladung  $q$  und magnetischem Moment  $\vec{m} = \frac{\mu}{\hbar} \vec{S}$  in einem äusseren elektromagnetischen Feld  $(\vec{E}, \vec{B})$  mit Vektorpotential  $\vec{A}$  und im Einflussbereich eines äusseren Potentials  $V$ , so wird seine Zeitentwicklung durch die Pauligleichung beschrieben, die die folgende Form hat:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = H(t) \psi_t, \quad \psi_t \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathcal{D}_S, \quad (91)$$

250

$$H(t) = \frac{1}{2m} \left[ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) + \left( \frac{\mu}{\hbar c} - \frac{q}{2mc^2} \right) \vec{E} \wedge \vec{S} \right]^2 - \frac{\mu}{\hbar} \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{S} + V(\vec{x}, t). \quad (92)$$

Die Beiträge zu  $H(t)$  linear in  $\vec{E}$  beschreiben die sog. Spin-Bahn Kopplung, die eben für die Aufspaltung der Terme in den Alkali Spektren verantwortlich ist. Sie sind relativistische Korrekturen, die man sich folgendermassen erklären kann: Ein Teilchen, das mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  passiert, erfährt in seinem eigenen Ruhesystem ein magnetisches Feld  $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$ . Trägt es ein magnetisches Moment  $\vec{m} = \frac{\mu}{\hbar} \vec{S}$ , so beträgt seine Zeeman Energie

$$\begin{aligned} E_Z &= -\vec{m} \cdot \vec{B}' = -\vec{m} \cdot \vec{B} + \vec{m} \cdot \left( \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E} \right) \\ &= -\vec{m} \cdot \vec{B} + \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{m}) \end{aligned} \quad (93)$$

Der zweite Term auf der R.S. von (93) stimmt

bis auf den Koeffizienten mit dem Beitrag linear in  $\vec{E}$

auf der rechten Seite von (92) überein, denn der Geschwin-

digkeit  $\vec{v}$  entspricht in der Quantenmechanik der Opera-

$\frac{1}{m} \left[ \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right]$ . Woher kommt die Diskrepanz zwi-

schen (92) und (93),  $\propto v/2mc^2$ ? Auf Grund der "äusseren

Kräfte ist die Bewegung des Teilchens beschleunigt, und

daher rotiert sein Ruhesystem mit einer Kreisfrequenz  $\omega$

um eine Achse  $\parallel (\vec{v} \wedge \vec{E})$ , (für  $|\vec{v}| \ll c$ ). Tatsächlich

ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_T = - \frac{q}{mc} \frac{\vec{v}}{2c} \wedge \vec{E}, \quad (94)$$

wie zuerst von Thomas (1927) gefunden wurde. Die Bewegung-

gleichung für den Spin  $\vec{S}$  im Ruhesystem lautet dann

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} \vec{S} \wedge \vec{B}' - \vec{S} \wedge \vec{\omega}_T \quad (\text{Thomas Präzession}) \quad (95)$$

Dies ist die Bewegungsgl. zur modifizierten Zeeman Energie

$$\begin{aligned} E_Z &= - \vec{m} \cdot \vec{B}' + \vec{\omega}_T \cdot \vec{S} \\ &= - \vec{m} \cdot \vec{B} + \left( \frac{\mu}{\hbar c} - \frac{q}{2mc^2} \right) \vec{v} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{S}), \quad (96) \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (92). Die (nicht-triviale!) Herleitung

von (94) findet man z.B. in Jackson's Buch

über klassische Elektrodynamik.

In (96) fehlen Terme quadratisch in  $\vec{E}$ , die in (92) vorkommen. Solche Terme sind höhere relativistische Korrekturen. Für ein Teilchen mit Spin  $s = \frac{1}{2}$  gilt

$$S_i S_j = \frac{\hbar^2}{4} \delta_{ij} + i \frac{\hbar}{2} \varepsilon_{ijk} S_k,$$

und daher  $(\vec{E} \wedge \vec{S})^2 \propto \vec{E}^2 \cdot \mathbb{1}$ . Daher kann man die in  $\vec{E}$  quadratischen Terme in (92) in eine "Renormierung" von  $V$  absorbieren.

Falls das elektrische Feld  $\vec{E}$  von einem zentral-symmetrischen, elektrostatischen Potential  $\phi$  erzeugt wird (e.g. von einem Kern), so gilt

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Dann ist der in  $\vec{E}$  lineare Term in (92) durch

$$\frac{1}{m} \left( \frac{\mu}{\hbar c} - \frac{q}{2mc^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} (\vec{S} \cdot \vec{L}) \quad (97)$$

(bis auf höhere Ableitungen von  $\phi$ ) gegeben, falls  $|\vec{\nabla} V| \ll |\vec{\nabla} \phi|$ . Das ist der übliche Ausdruck für die Spin-Bahn-Wechselwirkung; vergleiche mit (76)!

## Erhaltungssätze für die Pauli Gleichung.

Die Pauli Gleichung,  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = H(t) \psi_t$ , mit  $H(t)$  wie in (92) impliziert die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c = 0, \text{ wo} \quad (98)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = e \psi_t^*(\vec{x}) \cdot \psi_t(\vec{x}) = e (|\psi_t^+(\vec{x})|^2 + |\psi_t^-(\vec{x})|^2)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{J}_c &= e \frac{1}{2m} \left( \psi^* \left( \frac{\hbar \vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \psi - \left[ \left( \frac{\hbar \vec{\nabla}}{i} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi \right]^* \cdot \psi \right) \\ &= e \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi)^* \cdot \psi) + \frac{e}{mc} \psi^* \cdot \psi \vec{A}, \quad (99) \end{aligned}$$

(Konvektionsstromdichte). Die Magnetisierungsdichte ist

$$\vec{M}(\vec{x}, t) = \frac{g\mu_B}{\hbar} \psi_t^*(\vec{x}) \cdot \vec{S} \psi_t(\vec{x}) \quad (100)$$

Die magnetische Stromdichte  $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3)$  ist durch

$$\vec{M}_j = \frac{g\mu_B}{2m\hbar i} (\psi^* \cdot \vec{\sigma} D_j \psi - (D_j \psi)^* \cdot \vec{\sigma} \psi) \quad (101)$$

gegeben, wo  $D_j$  eine kovariante Ableitung bedeutet;

$(D_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ , falls  $\vec{A} = \vec{E} = 0$ ). Nur falls  $\vec{E} = 0$ , folgt

die Kontinuitätsgl.:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{M} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \vec{M}_j = 0.$$

Die Magnetisierungsdichte gibt einen Spinanteil zur

elektrischen Stromdichte:

$$\vec{J}_{\text{spin}} = c \vec{\nabla} \wedge \vec{M}, \quad (102)$$

und es folgt, dass  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{spin}} = 0$ . Die totale elektrische Stromdichte,  $\vec{J}_{\text{em}}$ , ist durch

$$\vec{J}_{\text{em}} = \vec{J}_{\text{c}} + \vec{J}_{\text{spin}}, \quad (103)$$

gegeben, und es gilt:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{em}} = 0$ .

Ein einfaches Beispiel zur Pauli-Gleichung:

Das Elektron in einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B}$ .

Wählen  $\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \wedge \vec{x})$ , so dass  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{B}$  und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir  $\vec{B}$  in  $(+z)$ -Richtung wählen, d.h.  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Wir definieren

$$\pi_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{2c} y B,$$

$$\pi_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{2c} x B,$$

$$\pi_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

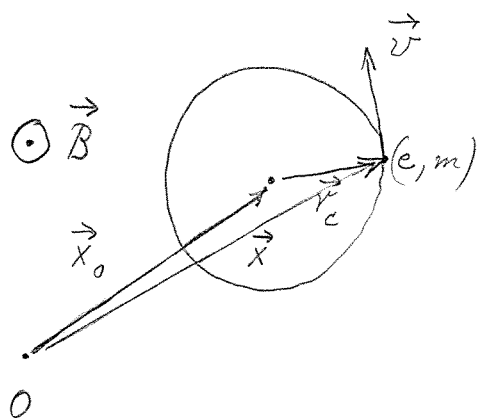
(104)

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2) \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \frac{g\mu_B}{2} B \sigma_3 \quad (105)$$

Die klassische Larmor- oder Zyklotronfrequenz ist

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}. \quad (106)$$

Wir betrachten nun Projektion der Bewegung in  $(x-y)$ -Ebene:



$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{r}_c$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{r}}_c, \text{ da } \dot{\vec{x}}_0 = 0$$

$$\text{Zentrifugalkraft} = \frac{mv^2}{r_c}, \quad r_c = |\vec{r}_c|.$$

$$\text{Lorentzkraft} = eB \frac{v}{c}.$$

$$\text{Also: } \frac{mv^2}{r_c} = eB \frac{v}{c}, \text{ oder } \omega_c \equiv \frac{v}{r_c} = \frac{eB}{mc} \quad (107)$$

Weiter gilt klassisch:

$$\vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{r}_c = \text{const.},$$

oder wegen (107),

$$\vec{x}_0 = \vec{x} + \varepsilon \frac{\vec{v}}{\omega_c} = \text{const.}, \quad (108)$$

255  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Da  $m\vec{v} = \vec{\pi}$ , folgt, dass auch

$$\vec{w} = \vec{\pi} - m\omega_c \varepsilon \vec{x} = \text{const.}, \quad (109)$$

● (Multiplikation von (108) mit  $-m\omega_c \varepsilon$ !).

In der QM werden aus  $\pi_x, \pi_y, \pi_z$  die Operatoren in (104). Durch Nachrechnen verifiziert man leicht, dass

$$[\pi_x, \pi_y] = i \frac{eB}{c} \hbar \mathbb{1} = i \hbar m \omega_c \mathbb{1}, \quad [\pi_{x/y}, \pi_z] = 0, \quad (110)$$

$$\text{und } [w_x, w_y] = -i \hbar m \omega_c \mathbb{1}, \quad [w_i, \pi_j] = 0. \quad (111)$$

Daraus folgt problemlos, dass

$$[H, w_j] = 0, \quad [H, \pi_z] = 0, \quad [H, \pi_i] = i \hbar \omega_c \varepsilon_{ij} \pi_j. \quad (112)$$



Schliesslich verifiziert man leicht, dass

$$L_z = \frac{2w_x^2 + w_y^2 - \pi_x^2 - \pi_y^2}{2m\omega_c} = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (113)$$

d. h.  $L_z$  ist die  $z$ -Komponente des Bahndrehimpulsoperators. Aus (110), (111) und (112) folgt dann, dass

$$[L_z, \pi_i] = i\hbar \varepsilon_{ij} \pi_j, \quad [L_z, w_i] = i\hbar \varepsilon_{ij} w_j, \quad (114)$$

und

$$[H, L_z] = 0,$$

wie es sich gehört!

Die Operatoren  $\pi_x$  und  $\pi_y$  sind die Generatoren von Translationen in der  $(x-y)$ -Ebene. Die erste Gleichung in (110) entspricht den Heisenberg'schen Vertauschungsrelationen für  $p$  und  $x$ . Sie sagt daher, dass die Translationen in der  $(x-y)$ -Ebene projektiv dargestellt werden; ("magnetische Translationen"!).

Aufgrund des von Neumann'schen Eindeutigkeitsatzes für irreduzible Darstellungen der Heisenberg'schen VR, können  $\pi_x$  und  $\pi_y$  wie folgt gewählt werden:

$$\pi_x = i \frac{eB}{c} \hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \pi_y = \frac{\hbar}{i} - p_y, \quad (115)$$

wo  $p_y$  eine beliebige reelle Zahl ist.

Nach (111) gilt Analoges für  $w_x, w_y$ :

$$w_x = \eta, \quad w_y = i \frac{eB}{c} \hbar \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (116)$$

Nun setzen wir  $\zeta - p_y = i \frac{eB}{\sqrt{mc^2}} u, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\sqrt{mc^2}}{eB} \frac{\partial}{\partial u}$ . (11)

Dann ist  $H = H_0 + H_1$ , wo

$$H_0 = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\omega_c^2}{2} u^2 \right] \otimes \mathbb{1}, \quad (118)$$

$$H_1 = \frac{\pi_z^2}{2m} \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \frac{g\mu_B}{2} B \sigma_3.$$

$H_0$  ist der Hamilton Operator eines ein-dimensionalen harmonischen Oszillators. Daher sind die Eigen-

werte von  $H_0$  die Energiewerte  $E_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right)$ ,

und die Eigenfunktionen sind Hermite Funktionen in  $u$ .

Mit dem gleichen Argumenten wie für  $H_0$  sieht

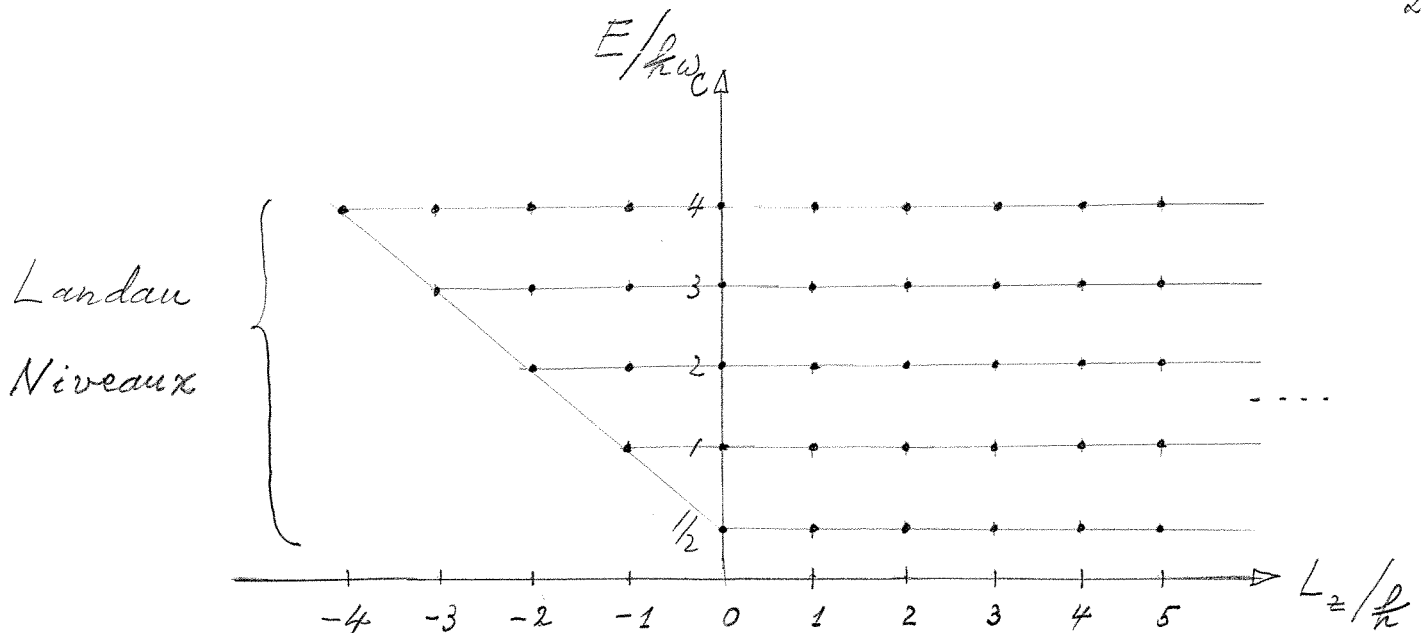
man, dass das Spektrum von  $L_z$  aus der Menge

$$\{ \hbar l = \hbar (m - n) : n, m = 0, 1, 2, \dots \} \quad (119)$$

besteht, d.h. das gemeinsame Spektrum von  $H_0$  und

$L_z$  besteht aus

$$\sigma(L_z, H_0) = \left\{ \hbar \left( l, \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) : n = 0, 1, 2, \dots, l = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots \right\} \quad (120)$$



- Jedes Landau Niveau ist unendlich entartet. Die Entartung kann durch die  $z$ -Komponente des Drehimpulses indiziert werden. Im  $n^{\text{ten}}$  Landau Niveau sind die Eigenwerte von  $L_z$  die Zahlen  $-\hbar n, -\hbar(n-1), \dots, 0, \hbar, \dots$ .

Schliesslich bemerken wir, dass  $H_0$  und  $H_1$  vertau-

- schen, und die zwei Terme in  $H_1$  vertauschen auch.

Damit ist das Spektrum von  $H$  durch

$$\hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{g\mu_B}{2} B + \frac{(\hbar k)^2}{2m}, \quad (121)$$

$n=0, 1, 2, \dots$ ,  $\hbar \in \mathbb{R}$  gegeben. Daraus sehen wir,

dass für  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$  und  $g=2$  ein Elektron

im  $(n-1)^{\text{ten}}$  Landau Niveau mit Spin "auf" die

selbe Energie hat wie ein Elektron im  $n^{\text{ten}}$  Landau

Niveau mit Spin "ab". Diese Entartung ist die Folge einer quantenmechanischen Supersymmetrie.

Für  $g \neq 2$  ist diese aber gebrochen.

Die hier dargestellten Resultate stammen im Wesentlichen von L. D. Landau.

### 6.7. Die Clebsch-Gordan Koeffizienten von $SU(2)$ .

Nun kehren wir noch einmal kurz zur Darstellungstheorie der  $SU(2)$  zurück. Hätten wir nämlich schon ein Problem, wie die Alkali-Spektren, behandelt, das nicht triviale Spin-Bahn Wechselwirkungen involviert, so hätten wir gelernt, dass auch für rotationsinvariante Potentiale weder Bahndrehimpuls  $\vec{L}$ , noch Spin  $\vec{S}$  getrennt erhalten sein müssen, sondern nur der totale Drehimpuls  $\vec{J}$  erhalten ist. Für Zustände mit Bahndrehimpuls  $l$  und Spin  $s$  liegt der totale Drehimpuls  $j$  zwischen  $|l-s|$  und  $l+s$ . In Gl. (72) fanden wir die Clebsch-Gordan Reihe

$$D_l \otimes D_s = \bigoplus_{j=|l-s|}^{l+s} D_j \quad (122)$$