Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung durch Separation der Variablen.

Beispiel. Zentralsymmetrisches Zweikörperproblem.

In sphärischen Polarkoordinaten ist

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\,p_\varphi^2\right) + V(r).$$

Die verkürzte H-J Gleichung ist also

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] + V(r) = E. \quad (3.9$$

Wir machen den Separationsansatz

$$S(r,\vartheta,\varphi,P) = S_r(r,P) + S_\vartheta(\vartheta,P) + S_\varphi(\varphi,P).$$

Dann wird aus (3.98)

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{dS_\varphi}{d\varphi}\right)^2\right] + V(r) = E.$$

Der einzige, von φ abhängige Term ist $\frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{dS_\varphi}{d\varphi}\right)^2$. Also muss gelten:

$$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi = \text{const.}$$

Dann folgt:

$$r^2\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + 2mr^2 V(r) - 2mEr^2 = -\left[\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right]. \tag{3.99}$$

Die L.S. ist von ϑ unabhängig. Also

$$\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = \alpha_\vartheta^2 = \text{const.}, \tag{3.100}$$

und aus (3.99), (3.100) folgt:

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = -2m\,V(r) + 2mE - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}. \tag{3.101}$$

Damit erhalten wir:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{dS_r}{dr} = \pm\sqrt{2m(E-V(r)) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} \tag{3.102}$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{dS_\vartheta}{d\vartheta} = \pm\sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} \tag{3.103}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi \tag{3.104}$$

Nun integrieren wir (3.102) – (3.104):

$$S_r(r) = \pm \int^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{(r')^2}}\, dr',$$

$$S_\vartheta(\vartheta) = \pm \int^{\vartheta} \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta'}}\, d\vartheta', \qquad (3.10$$

$$S_\varphi(\varphi) = \alpha_\varphi \cdot \varphi .$$

Als neue kanonischen Impulse wählen wir

$$P = (\alpha_0 := E,\ \alpha_\vartheta,\ \alpha_\varphi).$$

Die zugehörigen Lagekoordinaten findet man aus

$$\beta_0 = \frac{\partial S}{\partial E},\ \beta_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\vartheta},\ \beta_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi},$$

$$Q = (\beta_0, \beta_\vartheta, \beta_\varphi). \qquad (3.106$$

Die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten sind

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q},$$

mit $K = K(P) = \alpha_0$. Also

$$\dot{\beta}_0 = 1, \quad \dot{\beta}_\vartheta = \dot{\beta}_\varphi = \dot{P} = 0,$$

d.h.

$$\beta_0 = t + t_0,\ \beta_\vartheta = \text{const.},\ \beta_\varphi = \text{const.},\ P = \text{const.} \qquad (3.107)$$

Es entsprechen α_0 und β_0 also der Energie, resp. der Zeit. Aus (3.106) und (3.107) finden wir die zeitliche Durchlaufung der Bahnen und die Bahngleichungen.

$$\beta_0 = t(r) - t(r_0) = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{m\, dr'}{\sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{(r')^2}}} \qquad (3.108)$$

Diese Gleichung kennen wir natürlich schon:

$$p_r = m\frac{dr}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}},$$

was wieder auf (3.107) führt! Durch Vergleich mit unseren früheren Formeln finden wir, dass

$\alpha_\vartheta = l =$ Komponente des Drehimpulses $\perp$ Bahnebene. Eine spezielle Bahn findet man, indem man $\vartheta = \frac{\pi}{2} = const \Rightarrow p_\vartheta = 0 \Rightarrow$ $\alpha_\vartheta = \alpha_\varphi$ setzt. Dann folgt

$$\beta_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi \pm \int^{r} \frac{\alpha_\varphi}{(r')^2\sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\varphi^2}{(r')^2}}}\, dr'$$

$$= const.,$$

eine uns wohl bekannte Gleichung!

(1) Winkel- und Wirkungsvariablen für das Zweikörperproblem (Kepler Bewegung).

Für diese Systeme haben wir im Abschnitt 3 die verkürzte Hamilton-Jacobi Gleichung (3.97 durch Separation der Variablen gelöst: Die erzeug de Funktion $S(r, \vartheta, \varphi; \alpha_0 = E, \alpha_\vartheta, \alpha_\varphi)$ (sphäris Polarkoordinaten!) war durch

$$S = S_r + S_\vartheta + S_\varphi,$$

mit

$$S_r = \pm \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{(r')^2}}\, dr' \qquad (3.170)$$

$$S_\vartheta = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta'}}\, d\vartheta'$$

und

$$S_\varphi = \alpha_\varphi(\varphi - \varphi_0)$$

gegeben; (Gln. (3.105)). Natürlich ist die Schwerpunktsbewegung schon abgespalten. Wir interessier uns für gebundene Bahnen $(E < 0)$. Das System hat drei Freiheitsgrade (φ, ϑ, r) und drei Integra[le] der Bewegung, die miteinander in Involution sind, z. B. Hamiltonfunktion H, $\underline{L}^2_{rel.}$ und L^z_{rel}, ode[r] $H = \alpha_0$, α_ϑ, α_φ. Also ist es <u>integrabel</u>, und di[e] gebundenen Bahnen verlaufen auf dreidimensiona[len] (kompakten) Tori (in einem sechsdimensionalen Pha[sen]raum). Wir wollen nun die Wirkungsvariablen, I_1, I_2, I_3, als Funktionen von α_0, α_ϑ und α_φ bestimmen. Dazu benützen wir die allgemeine Definition (3.153) aus Abschnitt 3.7. Auf einem Torus $M_{\underline{\alpha}}$ zu festen Werten von α_0, α_ϑ und α_φ wählen wir drei Schleifen, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, die eine Homologiebasis bilden, und setzen dann

$$I_j = I_j(\underline{\alpha}) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} (p_r\, dr + p_\varphi\, d\varphi + p_\vartheta\, d\vartheta), \quad j = 1, 2, [3]$$

wo $(\varphi, \vartheta, r, p_\varphi, p_\vartheta, p_r)$ die üblichen kanonischen Koordinaten des Systems sind. Als Funktionen von

$\varphi, \vartheta, r, \alpha_0, \alpha_\varphi, \alpha_\vartheta$ sind p_φ, p_ϑ und p_r durch die R. S. der Gln. (3.104), (3.103) und (3.102) gegeben. Für konstant gehaltene Werte von $\alpha_0, \alpha_\varphi, \alpha_\vartheta$ wähl[en] wir

$$\gamma_1 \equiv \gamma_\varphi := \{0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \vartheta = \text{const.}, r = \text{const.}$$

$$\gamma_2 \equiv \gamma_\vartheta := \{\ \varphi = \text{const.}, r = \text{const.}\}$$

$$\gamma_3 \equiv \gamma_r := \{\ \varphi = \text{const.}, \vartheta = \text{const.}\}$$

Die Wertebereiche von ϑ und r sind durch die Werte von $\alpha_0, \alpha_\vartheta$ und α_φ bestimmt. Wir erhalten

$$I_1 \equiv I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi = \alpha_\varphi \quad (3.$$

$$I_2 \equiv I_\vartheta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} \, d\vartheta = \alpha_\vartheta - \alpha_\varphi \quad (3.17$$

$$I_3 \equiv I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r \, dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial r} dr$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} \, dr \quad (3.173)$$

Für das Keplerproblem ist $V(r) = -\frac{k}{r}$ $\left(k = G\frac{mM}{M_\odot -}\right.$
In diesem Fall kann (3.173) explizite berechnet wer[den]

$$I_r = \frac{mk}{\sqrt{-2m\alpha_0}} - \alpha_\vartheta , \quad (\alpha_0 \equiv E = \text{const.}) \qquad (3.174)$$

Die Hamiltonfunktion $H = \alpha_0$, ausgedrückt durch I_φ, I_ϑ und I_r ist also

$$H = - \frac{mk^2}{2\left(I_\varphi + I_\vartheta + I_r\right)^2} . \qquad (3.175)$$

Um die Winkelvariablen zu bestimmen, müssen wir in der erzeugenden Funktion $S(r, \vartheta, \varphi; \alpha_0, \alpha_\vartheta, \alpha_\varphi)$ die Variablen $\alpha_0, \alpha_\vartheta$ und α_φ durch I_r, I_ϑ und I_φ ausdrücken. Wir finden $S = S_r + S_\vartheta + S_\varphi$, mit

$$S_\varphi = I_\varphi \varphi ,$$

$$S_\vartheta = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{(I_\varphi + I_\vartheta)^2 - \frac{I_\varphi^2}{\sin^2\vartheta'}} \, d\vartheta' ,$$

$$S_r = \pm \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m\left(H(I) + \frac{k}{r'}\right) - \frac{(I_\varphi + I_\vartheta)^2}{(r')^2}} \, dr' .$$

Man bekommt dann

$$\varphi_1 = \frac{\partial S_r}{\partial I_\varphi} + \frac{\partial S_\vartheta}{\partial I_\varphi} + \varphi ,$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial S_r}{\partial I_\vartheta} + \frac{\partial S_\vartheta}{\partial I_\vartheta} ,$$

$$\varphi_3 = \frac{\partial S_r}{\partial I_r}$$

Da (<u>nur</u>) für das Keplerproblem die Hamilton-funktion nur von $I_r + I_\vartheta + I_\varphi$ abhängt, sind die <u>Frequenzen</u> $\omega_j(\underline{I}) = \dfrac{\partial H(\underline{I})}{\partial I_j}$, $j = 1, 2, 3$, der Bewe-gung der Winkelvariablen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ alle <u>gleich gr</u>

$$\omega_j \equiv \omega = \frac{m k^2}{(I_r + I_\vartheta + I_\varphi)^3} ;$$

die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}} ,$$

was dem 3. Kepler'schen Gesetz entspricht $\left(a = -\frac{k}{2E}\right.$

Für die Störungstheorie sind die folgenden neu Wirkungsvariablen nützlicher:

$$J_1 := I_\varphi = \alpha_\varphi , \quad J_2 := I_\vartheta + I_\varphi = \alpha_\vartheta ,$$

$$J_3 := I_r + I_\vartheta + I_\varphi ,$$

mit

$$H(\underline{J}) = - \frac{m k^2}{2 J_3^2} .$$

Die neuen Winkelvariablen bezeichnen wir mit w_1, w_2 u w_3. Die Frequenzen sind $\omega_1 = \omega_2 = 0$ und

$$\omega_3 = \omega = \text{mittlere Umlaufsfrequenz}.$$

Dies sind die sog. "Delauney'schen Bahnelemente".

<u>Interpretation.</u>

Keplerellipse: $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, $p = \dfrac{\ell^2}{mk} = a(1-\varepsilon$

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}; \quad (\ell^2 = L^2_{rel.}).$$

Dabei ist $\ell^2 = p_\vartheta^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \overset{(3.170)}{\Longrightarrow}$

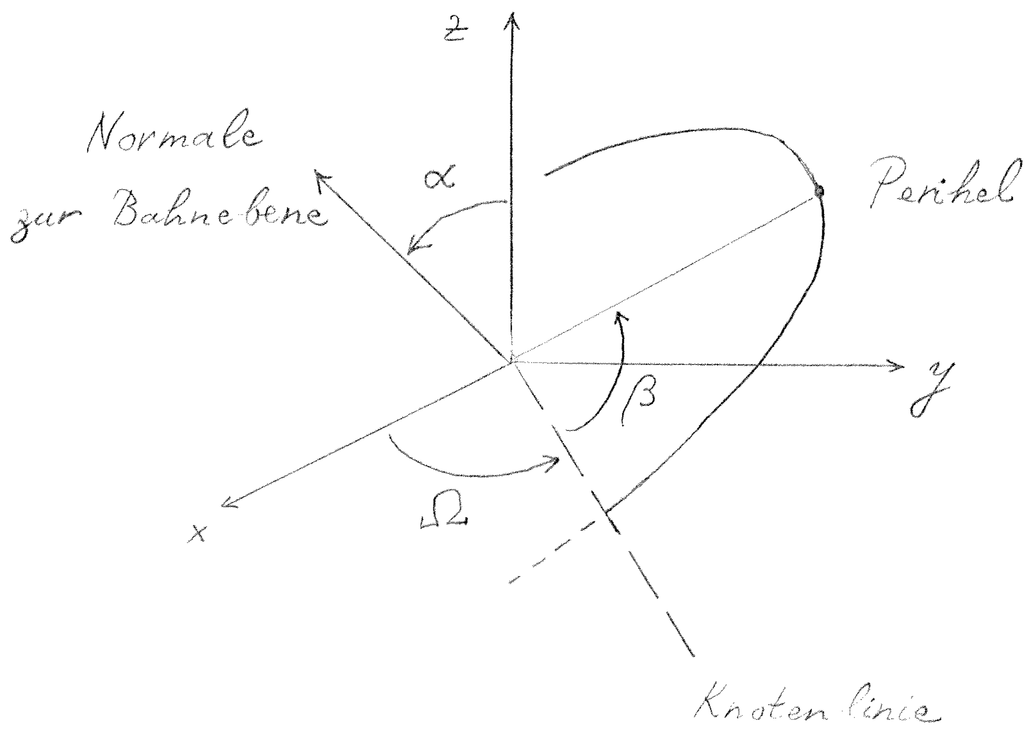
$$\ell = \alpha_\vartheta = J_2. \qquad (3.176)$$

Dann folgt, dass

$$p = \frac{J_2^2}{mk}, \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{J_2^2}{J_3^2}, \quad a = \frac{J_3^2}{mk} \qquad (3.177)$$

Ferner

$$L^z_{rel} = p_\varphi = \alpha_\varphi = J_1 \qquad (3.178)$$



$$\cos\alpha = \frac{L_{rel}^2}{l} = \frac{J_1}{J_2}, \qquad (3.17$$

$$w_1 = \Omega, \quad w_2 = \beta \qquad (3.180$$

w_3 = "mittlere Anomalie" = Winkelabstand eines gleichmässig die Ellipsenbahn umlaufenden Punktes vom Perihel, dessen Periode = T ist.

---

(2) Zeitunabhängige Störungstheorie.

$\underline{\varphi}, \underline{I}$: Winkel- und Wirkungsvariablen eines integrablen Hamilton'schen Systems mit Hamiltonfunktion $H_0(\underline{I})$. Dieses System sei einer Störu[ng] unterworfen (z. B. Gravitationskraft von Jupiter au[f] Erde). Hamiltonfunktion des gestörten Systems:

$$H(\underline{\varphi}, \underline{I}) = H_0(\underline{I}) + \varepsilon H_1(\underline{\varphi}, \underline{I}) + \varepsilon^2 H_2(\underline{\varphi}, \underline{I}) + \cdots, \qquad (3.$$

ε : Störparameter, $\varepsilon \ll 1$.

Wir suchen eine kanonische Transformation $\underline{\Psi}$,

$$\underline{\Psi} : (\underline{\varphi}, \underline{I}) \longmapsto (\underline{w}, \underline{J}) \qquad (3.$$

so, dass

$$H(\underline{\varphi}, \underline{I}) = (K \circ \underline{\Psi})(\underline{\varphi}, \underline{I}),$$

mit

$$K(\underline{w}, \underline{J}) \equiv K(\underline{J}) \qquad (3.1$$