Ü 1.2 Zur Definition affiner und Euklidischer Räume.

Ein <u>affiner Raum</u> $(M, E, +)$ besteht aus

(i) einer Punktmenge, M,

(ii) einem endlich dimensionalen VR, E, über $\mathbb{R}$

(iii) einer freien, transitiven Operation, $+$, von E

auf M, d.h.

$$+ : E \times M \longrightarrow M \quad , \quad (v, p) \longmapsto v + p \, ,$$

mit den Eigenschaften

a) $(v_1 + v_2) + p = v_1 + (v_2 + p)$ (assoziativ)

b) $v + p = p \iff v = 0$ (frei)

c) Zu $p, q \in M$ ex. $v \equiv q - p \in E$ so, dass

$v + p = q$ (transitiv)

<u>Affine Koordinatensysteme</u>: $(O; e_1, \dots, e_n)$, mit

$O \in M$ ("Ursprung" des Koordinatensystems) und

$(e_1, \dots, e_n)$ <u>Basis</u> von E.

$(x^1, \dots, x^n)$ <u>Koordinaten</u> von $p \in M \Leftrightarrow$

$$p = O + x^j e_j$$

(Summationskonvention!)

<u>Koordinatentransformationen</u>

$$\varphi : (O; e_1, \dots, e_n) \longrightarrow (O', e_1', \dots, e_n')$$

gegeben durch:

$$O = O' + a, \; a \in E; \quad e_i = \lambda^j{}_i \, e_j',$$

wo $\Lambda = (\lambda^j{}_i)$ regulär. Dies ist gleichbedeutend

mit

$$p = O + x^j e_j = O' + x'^j e_j', \quad \text{wo}$$

$$x'^i = \lambda^i{}_j x^j + a^i.$$

Kurz:

$$\underline{x}' = \Lambda \underline{x} + \underline{a}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

und, für $v \in E$,

$$\underline{v}' = \Lambda \underline{v}. \qquad (1.2)$$

Ein <u>Euklidischer Raum</u> $(M, E, +)$ ist ein

affiner Raum mit der Eigenschaft, dass E ein

Euklidischer VR ist, d.h. E trägt ein positiv-definites, inneres Produkt $(\cdot,\cdot)$ (Skalarprodukt). Der Abstand, $d(p,q)$, zwischen zwei Punkten p und q in M ist dann durch

$$d(p,q) = \sqrt{(p-q,\, p-q)} \qquad (1.3)$$

definiert.

- Ein <u>kartesisches Koordinatensystem</u> des Euklidischen Raumes $(M, E, +)$ ist ein affines Koordinatensystem $(O; e_1, \dots, e_n)$ mit der Eigenschaft, dass

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \qquad (1.4)$$

(d.h. $(e_1, \dots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis von E).

- <u>Koordinatentransformationen zwischen kartesischen Koordinatensystemen</u>: Diese <u>erhalten</u> $(\cdot,\cdot)$; d.h.

$$\underline{x}' = R\underline{x} + \underline{a}, \qquad R \in O(n), \qquad (1.5)$$

(d.h. $R^T R = R R^T = \mathbb{1}$).

Kartesische Koordinatentransformationen bilden die <u>Gruppe der Euklidischen Bewegungen</u>.