Satz 11.

Sei K eine symplektische Matrix und

$$p(\lambda) := \det(K - \lambda \mathbb{1})$$

ihr charakteristisches Polynom. Dann gilt, dass

$$p(\lambda) = \lambda^{2n} p(1/\lambda), \tag{149}$$

d.h. $p(\lambda) = a_{2n}\lambda^{2n} + a_{2n-1}\lambda^{2n-1} + \dots + a_0$ ist reflexiv:

$a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}, \dots$.

Insb. sind mit einem Eigenwert, λ, von K auch $\bar{\lambda}$, $1/\lambda$ und $1/\bar{\lambda}$ Eigenwerte von K.

Beweis. Wie oben gezeigt, ist $K^{-1} = -JK^TJ$, d.h. $K = -J(K^T)^{-1}J$. Daher gilt, dass

$$\begin{aligned}
\det(K - \lambda\mathbb{1}) &= \det\left(-J(K^T)^{-1}J - \lambda\mathbb{1}\right) \\
&= \det\left(-(K^T)^{-1} + \lambda\mathbb{1}\right) \\
&= \det\left(-K^{-1} + \lambda\mathbb{1}\right) \cdot \underbrace{\det K}_{=1} \\
&= \det\left(\lambda K - \mathbb{1}\right) \\
&= \lambda^{2n} \det\left(K - \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}\right),
\end{aligned}$$

was (149) beweist. Der Rest ist dann offensichtlich.

Eine symplektische Matrix K ist "stabil", falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass

$$|x| < \delta \Rightarrow |K^N x| < \varepsilon, \quad \forall N > 0,$$

wo $x \in R^{2n}$. Stabilität ist gleichbedeutend damit, dass alle Eigenwerte von K den Absolutbetrag 1 haben.

Eine symplektische Matrix K ist "<u>stark stabil</u>", falls jede symplektische Matrix K', mit $\|K - K'\| < \varepsilon$, für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, stabil ist. Man überlegt sich nun leicht, dass K stark stabil ist, falls alle Eigenwerte von K von einander verschieden sind und den Absolutbetrag 1 haben.

Sei λ ein EW von K mit Multiplizität k. Man sagt λ habe das Vorzeichen $+$ $(-)$, falls $\xi^T J K \xi > 0$ (< 0), für alle ξ im Eigenraum von K zu den Eigenwerten $\lambda, \bar{\lambda}$. Es stellt sich nun heraus, dass K genau dann <u>stark stabil</u> ist, wenn alle EW von K auf dem Einheitskreis liegen und ein festes Vorzeichen haben. (Dies ist eine Übungsaufgabe zu "harmonischen Oszillatoren".)

Erzeugende Funktionen.

Wir benützen nun den Satz von Darboux um mehr über erzeugende Funktionen symplektischer (kanonischer) Transformationen, zu lernen. Sei (T,ω) eine $2n$-dimensionale symplektische Mf. Sei $V \subseteq T$ ein sternförmiges offenes Gebiet in T, auf dem wir Darboux Koordinaten $(p_1, q^1, \dots, p_n, q^n) \equiv (p,q)$ wählen. Sei $\varphi : U \to V \subseteq T$ eine (lokal definierte symplektische od.) kanonische Abb. mit $(P,Q) = \varphi(p,q)$. Für die symplektische 2-Form ω gilt dann

$$\omega\big/_V = \sum_i dP_i \wedge dQ^i ,$$

und

$$\varphi^*\omega\big/_U = \sum_i dp_i \wedge dq^i$$

Man bemerke, dass

$$\omega\big/_V = d\Big(\sum_i P_i\, dQ^i\Big) = -\,d\Big(\sum_i Q^i dP_i\Big)$$

$$= d\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i X_{2i-1+\varepsilon_i}\, dX_{2i-\varepsilon_i}\Big), \qquad (150)$$

$\varepsilon_i = 0, 1, \ \forall i.$

Nehmen wir an, es seien $q^1, \dots, q^n, Q^1, \dots, Q^n$ zulässige

Koordinaten auf $U \cap V$. Dann gilt auf $U \cap V$, dass

$$\omega\big|_{U\cap V} - \varphi^* \omega\big|_{U\cap V} = 0,$$

da φ kanonisch ist. Mit (150) folgt, dass

$$d\Big(\sum_{i=1}^{n} P_i \, dQ^i - p_i \, dq^i\Big)\Big|_{U\cap V} = 0.$$

Das Poincaré Lemma garantiert nun, dass es eine Funktion $S(q^1, \dots, q^n, Q^1, \dots, Q^n)$ gibt so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (P_i \, dQ^i - p_i \, dq^i) = dS$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial Q^i} dQ_i \Big), \quad (151)$$

also

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial Q^i}(q, Q), \quad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q^i}(q, Q), \; i = 1, \dots, n. \quad (152)$$

Da (q, Q) zulässige Koo. auf $U \cap V$ sind, gilt, dass

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q^j} = -\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial Q^j}(q, Q)$$

auf $U \cap V$ für jedes q die Matrixelemente einer invertierbaren Matrix sind. Mit dem Satz über inverse Funktionen folgt dann, dass die n Gleichungen

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q^i}(q, Q), \quad i = 1, \dots, n,$$

nach $Q^1, \dots, Q^n$ aufgelöst werden können:

$$Q^i = \varphi^i(p,q), \quad i = 1, \dots, n. \tag{153}$$

Dann findet man, dass

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial Q^i}\left(q^1, \dots, q^n, Q^1 = \varphi^1(p,q), \dots, Q^n = \varphi^n(p,q)\right)$$

$$=: \varphi_i(p,q), \tag{154}$$

und damit ist φ durch die erzeugende Funktion S bestimmt.

Ist φ in der Nähe der Identität, so sind jedenfalls $P_1, \dots, P_n, q^1, \dots, q^n$ zulässige Koo. auf $U \cap V$. Dann folgt wie oben, dass es eine Funktion $\tilde{S}(P,q)$ gibt, mit

$$d\left(\sum_i Q_i \, dP_i + p_i \, dq^i\right) = d\tilde{S}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} \, dP_i + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^i} \, dq^i \right)$$

$$\Rightarrow \quad Q^i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i}(P,q), \quad p_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^i}(P,q), \tag{155}$$

und

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial P_j \, \partial q^i}\right)$$

bestimmt für jedes q eine invertierbare Matrix.

Daher sind die n Gln.

$$p_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^i}(P, q)$$

nach $P_1, \dots, P_n$ auflösbar:

$$P_i = \varphi_i(p, q), \quad i = 1, \dots, n,$$

und damit

$$Q^i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i}(\varphi(p,q), q) =: \varphi^i(p,q), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Identität hat die erzeugende Funktion

$$\tilde{S}(P, q) = \sum_{i=1}^{n} P_i q^i$$

$$\left(\Rightarrow \quad Q^i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i} = q^i, \quad p_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^i} = P_i, \quad i = 1, \dots, n\right)$$

Sei $\Gamma = T^*M$ das Kotangentialbündel über dem Konfigurationsraum, M, eines Hamiltonschen mechanischen Systems, und sei $f : M \longrightarrow M$ ein Diffeomorphismus von M,

$$Q^i = f^i(q^1, \dots, q^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir behaupten, dass sich f auf eine symplektische Transformation $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ erweitern lässt. Wir bestimmen φ über eine erzeugende Funktion $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}(P,q) := \sum_{i=1}^{n} P_i f^i(q^1,\dots,q^n).$$

Mit (155) folgt, dass

$$Q^i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P_i}(P,q) = f^i(q^1,\dots,q^n),$$

wie es sein soll, und

$$p_i = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^i}(P,q) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j(q^1,\dots,q^n)}{\partial q^i} P_j$$

$$= ((df)(q)P)_j \tag{156}$$

Da $\langle P,\dot{Q}\rangle = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i$ invariant sein soll, für

$P \in T^*_Q M$, $\dot{Q} \in T_Q M$, $Q = f(q)$, d.h.

$$\langle P,\dot{Q}\rangle = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}^i = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i = \langle p,q\rangle$$

finden wir

$$\sum_{i,j=1}^{n} P_i \frac{\partial f^i}{\partial q^j}(q^1,\dots,q^n)\,\dot{q}^j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j, \quad \forall \dot{q} \in T_q M, \forall q,$$

und daher

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i(q^1,\dots,q^n)}{\partial q^j} P_i,$$

wie in (156) behauptet wird.

Man beachte, dass die "Dimension" der erzeugenden

Funktion einer kanonischen Transformation die einer "Wirkung" (= [Impuls] × [Länge] = [Energie] × [Zeit]) ist.

Der Satz von Liouville.

Sei (Γ, ω) eine $2n$-dimensionale symplektische Mf. (Phasenraum). Dann ist

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ mal}} \equiv \omega^{\wedge n} =: d\lambda$$

eine Volumenform auf Γ. Man nennt sie Liouville Form (oder Liouville Mass). Wenn $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ ein Symplektomorphismus (kanonische Transformation) von Γ ist, dann gilt, dass

$$\varphi^* d\lambda = d\lambda, \tag{157}$$

d.h. das Liouville Mass ist invariant unter φ. In lokalen Darboux Koordinaten (p, q) und $(P, Q) = \varphi(p, q)$ gilt offenbar, dass

$$dp_1 \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq^n = dP_1 \wedge dQ^1 \wedge \cdots \wedge dP_n \wedge dQ^n.$$

Diese Behauptungen folgen unmittelbar daraus, dass der Grad von ω gerade $(= 2)$ ist, dass ω nicht-entartet ist, und dass $\varphi^* \omega = \omega$, (da φ kanonisch).

Die Hamilton-Jacobi Gleichungen.

Es sei (Γ, ω) der Phasenraum eines Hamiltonschen mechanischen Systems mit Hamilton Funktion H. Wir nehmen an, dass H nicht explizite von der Zeit t abhängt, d.h. das System autonom ist.

Seien $(p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n) \equiv (p, q)$ lokale Darboux Koordinaten auf Γ. Wir suchen eine kanonische Koordinaten Transformation $\varphi : (p,q) \longrightarrow P, Q$ so, dass die Hamiltonfunktion H, ausgedrückt in den neuen Koordinaten, nur von den Impulsen, $P = (P_1, \dots, P_n)$, abhängt; d.h.

$$H(\varphi^{-1}(P,Q)) =: K(P), \text{ unabh. von } Q. \qquad (158)$$

In den neuen Koordinaten lauten dann die Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}(P), \quad \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q^i} \equiv 0, \; i = 1, \dots, n. \qquad (159)$$

Offenbar sind die neuen Impulse $P_1, \dots, P_n$ Konstanten der Bewegung: $P_i(t) = P_i(t_0) =: P_i^{(0)}$, $\forall t, \forall i = 1, \dots, n.$

Daher folgt, dass

$$Q^i(t) = \Omega^i \cdot (t - t_0) + Q^{i(0)}, \tag{160}$$

wo $\Omega^i = \dfrac{\partial K}{\partial P_i}(P^{(0)})$, und $Q^{i(0)} = Q^i(t_0)$, $i = 1, \dots, n.$

Damit sind die Bewegungsgleichungen (159) in den neuen Koordinaten (P, Q) explizite gelöst.

Wir beschreiben nun die kanonische Transformation φ durch eine erzeugende Funktion $S(P, q)$. Dann gilt, dass

$$Q^i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(P, q) \quad , \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}(P, q); \tag{161}$$

siehe (155). Damit (158) gilt, muss $S(P, q)$ offenbar die Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(P, q)\right) = K(P), \tag{162}$$

für eine gewisse Funktion $K(P)$ (unabh. von q!) erfüllen. Man nennt (162) die verkürzte Hamilton-Jacobi Gleichung. Die Gleichungen (161), (162) sind

Ausgangspunkt für die Störungstheorie in der Hamiltonschen Mechanik; $\left(H(p,q) = H_0(p) + \varepsilon H_I(p,q), \right.$ mit $\left. |\varepsilon| \text{ klein} \right)$. Man kann auch die KAM Theorie entwickeln, indem man von (161), (162) ausgeht. Wieso in diesen Unternehmungen Fourier-Reihen eine wichtige Rolle spielen, erfahren wir im nächsten Abschnitt.

Die Gl. (162) ist eine (i.a. nicht-lineare) partielle Dgl. erster Ordnung für S.

Wenn das mechanische System nicht autonom ist, d.h. H hängt explizite von der Zeit ab, dann wird auch S explizite von der Zeit abhängen. Um nützliche erzeugende Funktionen kanonischer Transformationen zu finden, kehre man zum Hamiltonschen Variationsprinzip zurück; ($\to$ Hamilton-Jacobi Gln.!)