Zusatzskript zur Vektor- und Tensoranalysis in krummlinigen Koordinaten auf E^3

J. Fröhlich

FS 2011

3. Mathematische Hilfsmittel.

3.1 Koordinaten.

Physikalischer Raum $\mathbb{E}^3$, mit Teilmenge $\Omega, \Lambda, \dots$, deren Ränder mit $\partial\Omega, \partial\Lambda, \dots$ bezeichnet werden. Flächen im $\mathbb{E}^3$ werden mit $\Sigma, S, \dots$ bezeichnet, Kurven mit $\Gamma, \gamma, \dots$

Es sei p ein Punkt im $\mathbb{E}^3$. Mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

bezeichnen wir die Koordinaten von p bez. eines fest gewählten kartesischen Koordinatensystems. In Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{E}^3$ werden wir auch geeignete krummlinige Koordinaten, etwa Polar- oder Zylinderkoordinaten, benützen. Allgemein bezeichnen wir die 3 Koordinaten von p mit ξ^1, ξ^2 und ξ^3.

In jedem Punkt $p \in \mathbb{E}^3$ ist ein euklidischer Vektorraum T_p, der "Tangentialraum", angebracht:

$$T_p = \{ q - p : q \in \mathbb{E}^3 \}. \tag{3.2}$$

Die für die Geometrie <u>wichtigsten Begriffe</u> sind:

(a) reell (oder komplex-) wertige (glatte) <u>Funktionen</u> $\varphi(p), f(p), \cdots$ auf $\mathbb{E}^3$;

(b) <u>Kurven</u> γ, d. h. Abbildungen eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{E}^3$:

$$\{ p(t) \in \mathbb{E}^3 : t \in I \}. \tag{3.3}$$

(c) <u>Vektorfelder</u> X, d. h. jedem $p \in \mathbb{E}^3$ wird ein $X(p) \in T_p$ zugeordnet, (mit der Eigenschaft, dass die Komponenten $X^j(p)$ glatte Funktionen sind). Mit Hilfe von Vektorfeldern kann man <u>Richtungsableitungen</u> definieren:

$$\varphi(p) \mapsto X(\varphi)(p) = \sum_{j=1}^{3} X^j(p) \frac{\partial\varphi(p)}{\partial x^j}$$

$$\equiv X^j(p) \frac{\partial\varphi(p)}{\partial x^j}, \qquad (3.4)$$

wo wir die Einstein'sche <u>Summationskonvention</u>

$$a^{\cdots i}_{\cdots} \, b^{\cdots}_{i \cdots} \equiv \sum_{i=1}^{3} a^{\cdots i}_{\cdots} \, b^{\cdots}_{i \cdots}$$

benützt haben. Die Funktion $X(\varphi)$ soll <u>unabhängig</u> von den benützten Koordinaten definiert sei[n]. Seien x^1, x^2, x^3 kartesische und ξ^1, ξ^2, ξ^3 krumm[-]linige Koordinaten von p. Wir drücken ξ^i als Funktion von x^1, x^2, x^3 aus, $i = 1,2,3$, und verlangen, dass die Umkehrfunktionen

$$x^j = x^j(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad j = 1,2,3,$$

auch existieren. <u>Lokal</u> ist dies durch die Forderung

$$\det\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) \neq 0 \qquad (3.5)$$

garantiert, d.h. die Matrix $A = (A^i_{\ j})$, wo $A^i_{\ j} = \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$, ist <u>regulär</u>; (<u>inverse-Funktionen</u>

Satz). Bezeichnen wir die Komponenten von X in krummlinigen Koordinaten mit Ξ^j, so soll gelten

$$X(\varphi)(p) = X^j(p)\,\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x^j}$$

$$= \Xi^j(p)\,\frac{\partial\varphi(p)}{\partial\xi^j}$$

$$= \Xi^j(p)\,\frac{\partial x^l(p)}{\partial\xi^j}\cdot\frac{\partial\varphi(p)}{\partial x^l} \qquad (3.6)$$

Durch Vergleich findet man

$$X^l(p) = \frac{\partial x^l(p)}{\partial\xi^j}\,\Xi^j(p),$$

oder

$$\Xi^l(p) = \frac{\partial\xi^l(p)}{\partial x^j}\,X^j(p). \qquad (3.7)$$

Der Gradient $\vec{\nabla}$ transformiert wie folgt:

$$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right), \text{ mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial\xi^l(p)}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial\xi^l}. \qquad (3.8)$$

(d) Metrik: $\quad d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$

Pythagoras: $\quad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

In krummlinigen Koordinaten:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k \right)^2$$

$$= g_{ik}(p)\, d\xi^i\, d\xi^k , \qquad (3.9)$$

wo

$$g_{ik}(p) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j(p)}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^j(p)}{\partial \xi^k} . \qquad (3.10)$$

Mit g^{ik} bezeichnet man die Matrixelemente der Inversen von (g_{ik}); weiter ist

$$g = \det(g_{ik}). \qquad (3.11)$$

In kartesischen Koordinaten gilt offenbar

$$g_{ik} = \delta_{ik} , \quad (g_{ik}) = \mathbb{1}, \qquad (3.12)$$

mit $g = 1$.

Transformation des Volumenelementes:

$$d^3x = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) d^3\xi . \qquad (3.13)$$

Allgemein gilt $\det A = \det A^T$. Also

$$g = \det(g_{ik}) \overset{(3,10)}{=} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right) \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)^T$$

$$= \left(\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)\right)^2 \tag{3.14}$$

Daher

$$dv \equiv d^3x = \sqrt{g}\, d^3\xi. \tag{3.15}$$

<u>Divergenz eines Vektorfeldes in krummlinigen Koos</u>

In kartesischen Koordinaten definieren wir

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^j}{\partial x^j} \tag{3.16}$$

Daher

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X^j}{\partial x^j} = \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \frac{\partial X^j}{\partial \xi^l}$$

$$\overset{(3.7)}{=} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}\Xi^m\right)$$

$$= \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^l \partial \xi^m}\Xi^m + \frac{\partial \Xi^m}{\partial \xi^m}. \tag{3.17}$$

<u>Lemma 1.</u>

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\sqrt{g}\,\Xi^l\right). \tag{3.18}$$

Beweis.

$$\text{R.S. von } (3.18) = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial \xi^l}\,\Xi^l + \frac{\partial \Xi^l}{\partial \xi^l}.$$

Damit dies mit (3.17) übereinstimmt, muss offenbar gelten:

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial \xi^l} = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^m \partial \xi^l}. \qquad (3.19)$$

Um das zu verifizieren, benützen wir die folgenden Tatsachen:

(i) $$g^{ik} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} \qquad (3.20)$$

Der Beweis ist offensichtlich.

(ii) (g_{ik}) ist eine positiv-definite (insb. symmetrische) Matrix. Eine solche kann durch eine Rotation diagonalisiert werden. Die Diagonalelemente, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sind die Eigenwerte von (g_{ik}) und sind positiv. Dann gilt

$$g = \det(g_{ik}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$= \exp \sum_{i=1}^{3} \ln \lambda_i$$

$$= \exp \mathrm{Sp} \ln (g_{ik})$$

Damit folgt, dass

$$\frac{\partial g}{\partial \xi^l} = \frac{\partial}{\partial \xi^l} \exp \mathrm{Sp} \ln (g_{ik})$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \xi^l} \right) \underbrace{\exp \mathrm{Sp} \ln (g_{ik})}_{g}$$

$$\overset{\text{Serie 2}}{\downarrow}$$

$$= \mathrm{Sp} \left(g^{ik} \frac{\partial g_{km}}{\partial \xi^l} \right) g$$

$$= \left(g^{ik} \frac{\partial g_{ki}}{\partial \xi^l} \right) \cdot g . \qquad (3.21)$$

Aus (3.10) und (3.20) folgt, dass

$$g^{ik} \frac{\partial g_{ki}}{\partial \xi^l} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} \left[\frac{\partial^2 x^m}{\partial \xi^l \partial \xi^k} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} + \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} \frac{\partial^2 x^m}{\partial \xi^l \partial \xi^i} \right]$$

$$= 2 \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^l \partial \xi^i} \qquad (3.22)$$

Aus (3.21) und (3.22) folgt nun, dass

$$\frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial g}{\partial \xi^l} = \frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^l\,\partial \xi^i},$$

also (3.19)!

Q.E.D.

(e) Vektoren, Formen, Skalarprodukt auf T_p.

$$T_p^* = \{\text{Lineare Funktionale auf } T_p\}$$

(Dualraum von T_p)

$$T_p \ni X(p) = \left(\Xi^j(p)\right)_{j=1}^3,\quad T_p^* \ni \omega(p) = \left(\omega_j(p)\right)_{j=1}^3$$

$$\omega(X)(p) = \omega_j(p)\,\Xi^j(p).$$

Metrik $g(p):\ T_p \longrightarrow T_p^*$, definiert durch

$$X(p) \longmapsto \xi(p) = \left(\Xi_j(p) = g_{jk}(p)\,\Xi^k(p)\right)_{j=1}^3.$$

Skalarprodukt auf T_p: $X_1(p)$, $X_2(p)$ in T_p.

Wir definieren

$$X_1(p)\cdot X_2(p) = \sum_{j=1}^3 X_1^j(p)\,X_2^j(p) \quad (\text{kartesische Koo.})$$

$$\overset{(3.7),\,(3.10)}{=} \Xi_1^i(p)\,g_{ik}(p)\,\Xi_2^k(p) = \xi_1(X_2)(p) \tag{3.23}$$

Korollar 2.

$$\int_{E_3} dv\ \operatorname{grad}\varphi(X) = -\int_{E^3} dv\ \varphi\ \operatorname{div} X$$

Beweis, Übung im partiellen Integrieren + (3.15) & Lemma 1.

Q.E.D.

(f) Integral eines Vektorfeldes entlang Kurve.

Sei $\gamma = \{p(t) \in \mathbb{E}^3 : t \in I\}$ eine parametrisier Kurve in $\mathbb{E}^3$. Dann ist $\dot{p}(t) \equiv \frac{dp(t)}{dt}$ ein Tangentialvektor an γ im Punkte $p(t)$. Wir definier

$$\int_\gamma X \cdot ds = \int_I \sum_{j=1}^{3} X^j(p(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} dt \quad \text{(kartes. Ko}$$

$$\overset{(3.7)}{=} \int_I \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l}(p(t))\, \Xi^l(p(t)) \times \frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}(p(t)) \frac{d\xi^m(t)}{dt}\, dt$$

$$\overset{(3.10)}{=} \int_I \Xi^l(p(t))\, g_{lm}(p(t)) \frac{d\xi^m}{dt}\, dt$$

$$\overset{(3.23)}{=} \int_I X(p(t)) \cdot \frac{dp(t)}{dt}\, dt \qquad (3.24)$$

(g) Integral eines Vektorfeldes über eine Fläche

Sei Σ eine Fläche im $\mathbb{E}^3$. Wir wählen eine Parameterdarstellung von Σ: Sei B ein Gebiet im $\mathbb{R}^2$ (mit stückweise glattem Rand) und p eine glatte Abbildung von B auf Σ:

$$p : (t,s) \in B \longmapsto p(t,s) \in \Sigma .$$

Tangentialvektoren an Σ im Punkte $p(t,s)$ sind Linearkombinationen von

$$X_t(t,s) \equiv \frac{\partial p(t,s)}{\partial t}$$

und

$$X_s(t,s) \equiv \frac{\partial p(t,s)}{\partial s} . \qquad (3.25)$$

Sei X ein in einer Umgebung von Σ definiertes Vektorfeld. Wir benützen in $\mathbb{E}^3$ zunächst <u>kartesische Koordinaten.</u> Dann können wir aus $X(p(t,s))$, $X_t(t,s)$ und $X_s(t,s)$ die Matrix

$$A(t,s) \equiv \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ X_t^1 & X_t^2 & X_t^3 \\ X_s^1 & X_s^2 & X_s^3 \end{pmatrix}$$

bilden, für die gilt

$$\det A(t,s) = X(p(t,s)) \cdot (X_t(t,s) \wedge X_s(t,s)),$$

wo $X \wedge Y$ das übliche Vektorprodukt von X mit Y bezeichnet. Benützen wir (3.7) zur Umrechnung in krummlinige Koordinaten, so finden wir

$$\det A(t,s) = \det\left(\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}(p(t,s))\right) \det \begin{pmatrix} \Xi^1 & \Xi^2 & \Xi^3 \\ \Xi^1_t & \Xi^2_t & \Xi^3_t \\ \Xi^1_s & \Xi^2_s & \Xi^3_s \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{g(p(t,s))}\ \det\left(\Xi, \Xi_t, \Xi_s\right)$$

$$= \sqrt{g(p(t,s))}\ \varepsilon_{ijk}\, \Xi^i\, \Xi^j_t\, \Xi^k_s, \qquad (3.26)$$

wo ε_{ijk} = Signum von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$. Für $X_1(p)$ und $X_2(p)$ definieren wir (in beliebigen Koordinaten)

$$(X_1(p) \wedge X_2(p))^l = g^{li}(p) \sqrt{g(p)}\ \varepsilon_{ijk}\, \Xi^j_1(p)\, \Xi^k_2(p).$$

Wir definieren das Oberflächenelement $\qquad (3.27)$

$$d\sigma_p = X_t(p) \wedge X_s(p)\, dt\, ds \qquad (3.28)$$

Nun setzen wir

$$\int_\Sigma X(p) \cdot d\sigma_p = \int_B \det A(t,s)\, dt\, ds$$

$$= \int_B \sqrt{g(p(t,s))}\ \varepsilon_{ijk}\, \Xi^i(p(t,s)) \times \Xi^j_t(t,s)\, \Xi^k_s(t,s)\, dt\, ds, \qquad (3.29)$$

und die R. S. ist wegen (3.26), (3.28) und (3.23) in beliebigen Koordinaten richtig.

(h) Die Sätze von Stokes, Gauss und Green.

In kartesischen Koordinaten definieren wir

$$(\mathrm{rot}\, X)^k = \varepsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x^m} X_n , \qquad (3.30)$$

wo

$$X_n = \delta_{nj} X^j = X^n .$$

In beliebigen, krummlinigen Koordinaten definieren wir

$$\Xi_n(p) = g_{nl}(p)\, \Xi^l(p), \qquad (3.31)$$

und

$$(\mathrm{rot}\, X)^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \Xi_n \qquad (3.32)$$

Durch Rechnen findet man nun, dass sich rot X unter Koordinatentransformationen wie ein Vektor transformiert, d.h. gemäss (3.7):

$$\varepsilon^{kmn}\frac{\partial}{\partial x^m}X_n \overset{(3.7),\,(3.31)}{=} \varepsilon^{kmn}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\Xi_i\right)$$

$$= \varepsilon^{kmn}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi_i$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}\underbrace{\frac{\partial \xi^j}{\partial x^r}\varepsilon^{rmn}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}}_{\varepsilon^{jli}\det\left(\frac{\partial \xi^p}{\partial x^q}\right)\overset{(3.14)}{=}\frac{\varepsilon^{jli}}{\sqrt{g}}}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi_i$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{jli}\frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi_i}_{=(\operatorname{rot} X)^j}$$

$= (\operatorname{rot} X)^j$ im krummlinigen Koordinaten System.

Satz von Stokes.

Sei Σ ein Flächenstück im $\mathbb{E}^3$, das durch eine Kurve $\gamma = \partial\Sigma$ berandet ist. Sei X ein in einer Umgebung von Σ definiertes Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\gamma=\partial\Sigma} X\cdot ds = \int_{\Sigma} (\operatorname{rot} X)(p)\cdot d\sigma_p$$

$$\overset{(3.32),(3.28)}{=} \int_B \left\{ \left(\frac{\partial \Xi_n}{\partial \xi^m} - \frac{\partial \Xi_m}{\partial \xi^n} \right) \Xi^m_t \, \Xi^n_s \right\} (p(t,s)) \, dt \, ds \tag{3.33}$$

Satz von Gauss.

Sei Ω ein kompaktes Gebiet im $\mathbb{E}^3$ mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, und sei X ein in einer Umgebung von Ω definiertes Vektorfeld. In (3.28) wählen wir X_t und X_s so, dass $d\sigma_p$ ins Äussere von $\partial\Omega$ zeigt, $\forall p \in \partial\Omega$. Dann gilt

$$\int_\Omega dv \; \mathrm{div}\, X = \int_{\partial\Omega} X(p) \cdot d\sigma_p \tag{3.34}$$

<u>Bemerkung.</u> Der Satz von Gauss folgt aus Korollar 2, indem man

$$\varphi(p) = \chi_\Omega(p) = \begin{cases} 1, & p \in \Omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.35}$$

setzt. Dann ist

$$\mathrm{grad}\,\varphi\,(X)\, dv = -X \cdot d\sigma$$

Als Korollar des Satzes von Gauss erhalten wir den Satz von Green. Zuerst definieren wir in beliebigen Koordinaten

$$(\mathrm{Grad}\,\varphi)^i(p) = g^{ij}(p)\,(\mathrm{grad}\,\varphi)_j(p)$$
$$= g^{ij}(p)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^j}(p). \qquad (3.36)$$

Der Laplace Operator in beliebigen Koordinaten ist dann durch

$$\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{Grad} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\cdot)\right) \qquad (3.37)$$

gegeben. Man verifiziert nun leicht, dass für glatte Funktionen ψ und φ

$$\mathrm{div}\,(\psi\,\mathrm{Grad}\,\varphi) = \mathrm{grad}\,\psi\,(\mathrm{Grad}\,\varphi) + \psi\,\Delta\varphi \qquad (3.38)$$

gilt. Setzen wir im Satz von Gauss

$$X = \psi\,\mathrm{Grad}\,\varphi$$

so erhalten wir den

<u>Satz von Green.</u>

$$\int_\Omega dv\,\psi\,\Delta\varphi = -\int_\Omega dv\,\mathrm{grad}\,\psi\,(\mathrm{Grad}\,\varphi) + \int_{\partial\Omega} (\psi\,\mathrm{Grad}\,\varphi)(p)\cdot d\vec{o} \qquad (3.39)$$

(i) Ableitung eines Vektorfeldes in krummlinigen Koordinaten; (kovariante Ableitung,

Seien X_1 und X_2 zwei über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^3$ definierte Vektorfelder, und $p \in \Omega$. In kartesischen Koordinaten definieren wir

$$\left(\nabla_{X_1} X_2\right)^j(p) = X_1^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i} X_2^j(p) \tag{3.40}$$

Mit (3.7) finden wir

$$\left(\nabla_{X_1} X_2\right)^j(p) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\,\Xi_1^l(p)\,\frac{\partial \xi^m}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \xi^m}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^k}\,\Xi_2^k(p)\right)$$

$$= \Xi_1^l(p)\,\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^k}\,\Xi_2^k(p)\right)$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial \xi^k}\,\Xi_1^l(p)\,\frac{\partial}{\partial \xi^l}\,\Xi_2^k(p)$$

$$+ \Xi_1^l(p)\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^l \partial \xi^k}\,\Xi_2^k(p). \tag{3.41}$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial \xi^l \partial \xi^k} = \delta^j_m\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial \xi^l \partial \xi^k} = \frac{\partial \xi^n}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^j}{\partial \xi^n}\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial \xi^l \partial \xi^k}$$

Wir definieren

$$\Gamma^n_{lk}(p) = \frac{\partial \xi^n}{\partial x^m}\,\frac{\partial^2 x^m}{\partial \xi^l \partial \xi^k}(p) \tag{3.42}$$

Dann folgt aus (3.41), dass

$$(\nabla_{X_1} X_2)^j(p) = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^n}\left\{\Xi_1^l(p)\left(\frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi_2^n(p)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \Gamma^n_{lk}(p)\,\Xi_2^k(p)\right)\right\} \quad (3.43)$$

Mit (3.7) haben wir also in <u>krummlinigen Koordinaten</u>, dass

$$(\nabla_{X_1} X_2)^n(p) = \Xi_1^l(p)\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi_2^n(p) + \Gamma^n_{lk}(p)\,\Xi_2^k(p)\right\}$$

oder

$$\nabla_l\, \Xi^n(p) = \frac{\partial}{\partial \xi^l}\Xi^n(p) + \Gamma^n_{lk}(p)\,\Xi^k(p), \quad (3.43)$$

wo $\Gamma^n_{lk}(p)$ durch (3.42) gegeben ist.

Man nennt ∇_l <u>kovariante Ableitung.</u>

<u>Lemma 3.</u>

Für (g_{ik}) und (g^{ik}) wie in (3.10) gilt

$$\Gamma^n_{lk}(p) = \frac{1}{2} g^{nm}(p)\left\{\frac{\partial g_{lm}(p)}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{mk}(p)}{\partial \xi^l} - \frac{\partial g_{lk}(p)}{\partial \xi^m}\right\}, \quad (3.44)$$

und

$$\operatorname{div} X = \nabla_l\, \Xi^l. \quad (3.45)$$

<u>Beweis.</u> Übungen, Serie 2.

3.2 Multilineare Algebra, Tensorfelder.

Sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen und sei V^* der Raum der stetigen, linearen Funktionale auf V, d. h. der Dualraum von V.

Beispiel. $V = T_p$, $V^* = T_p^*$, für $p \in \mathbb{E}^3$.

Elemente von V: Vektoren, $X, Y, \cdots$;

Elemente von V^*: (1-) Formen, $\xi, \eta, \cdots$.

(X: kontravariante Vektoren; ξ: kovariante Vektoren).

Hom V: Lineare Abbildungen von V in V.

End V: Reguläre, lineare Abbildungen von V in V.

Für $A \in \mathrm{Hom}\, V$ definieren wir A^* in $\mathrm{Hom}\, V^*$ durch

$$(A^*\xi)(X) = \xi(AX), \qquad (3.45)$$

$\forall X \in V, \forall \xi \in V^*$. Die Zuordnung $A \in \mathrm{Hom}\, V \longmapsto A^* \in \mathrm{Hom}\, V^*$ definiert einen Isomorphismus von $\mathrm{Hom}\, V$ ($\mathrm{End}\, V$) auf $\mathrm{Hom}\, V^*$ ($\mathrm{End}\, V^*$).

Sei $\{e_1, \cdots, e_n\}$ eine Basis von V, wo

$n = \dim V < \infty$. Die <u>duale Basis</u>, $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$, ist eine Basis von V^* mit der Eigenschaft, d

$$\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j . \qquad (3.46)$$

Komponenten von X in V bez. $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$X = X^j e_j \qquad (3.47)$$

Komponenten von ξ in V^* bez $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$:

$$\xi = \xi_j \varepsilon^j . \qquad (3.48)$$

Dann gilt mit (3.46)

$$\xi(X) \equiv X(\xi) = \xi_j X^j . \qquad (3.49)$$

Jedem $A \in \operatorname{Hom} V$ kann man eine $n \times n$ Matrix $(A^k{}_l)$ zuordnen:

$$A e_i = A^j{}_i e_j . \qquad (3.50)$$

Dann folgt

$$A^* \varepsilon^j = A^j{}_i \varepsilon^i \qquad (3.51)$$

Mit (3.47) und (3.48) folgt

$$\begin{aligned} (AX)^j &= \varepsilon^j (AX) \\ &= \varepsilon^j (X^l A^m{}_l e_m) \\ &= A^j{}_l X^l \qquad (3.52) \end{aligned}$$

und

$$(A^*\xi)_j = e_j(A^*\xi)$$
$$= e_j(\xi_l A^l{}_i \varepsilon^i)$$
$$= A^l{}_j \xi_l . \qquad (3.53)$$

<u>Basis Transformationen.</u> Sei $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ eine durch

$$\tilde{e}_i = R^j{}_i e_j \qquad (3.54)$$

definierte, neue Basis von V, mit $R = (R^j{}_i)$ in End V. Dann ist die Basis $\{\tilde{\varepsilon}^1, \dots, \tilde{\varepsilon}^n\}$, die zu $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ <u>dual</u> ist, durch

$$\tilde{\varepsilon}^i = (R^{-1})^* \varepsilon^i = (R^{-1})^i{}_j \varepsilon^j$$
$$\equiv R_j{}^i \varepsilon^j \qquad (3.55)$$

gegeben. Es folgt

$$X^j = R^j{}_i \tilde{X}^i ,$$
$$\xi_j = R_j{}^i \tilde{\xi}_i \qquad (3.56)$$

<u>Metrik.</u> Eine Metrik auf V ist eine Abbildung, G, von V auf V^*, mit der Eigenschaft, dass

$$(GX)(X) > 0 , \quad \forall X \text{ in } V, \qquad (3.57)$$

$X \neq 0$. In einer Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V:

$$(GX)(Y) = X^i g_{ij} Y^j,$$

d.h. $G \leftrightarrow (g_{ij})$. Gegeben G, definieren wir $G^* : V^* \to V$ dadurch dass

$$(GX)(G^*\xi) = X(\xi), \qquad (3.58)$$

$\forall X \in V$, $\forall \xi \in V^*$. Dann folgt

$$\xi(G^*\eta) = \xi_i g^{ij} \eta_j, \qquad (3.59)$$

wo g^{ij} das ij Matrixelement der Inversen von (g_{kl}) ist.

Eine Abbildung $A \in \operatorname{End} V$ heisst <u>orthogonal</u>, falls

$$(GAX)(AY) = (GX)(Y), \qquad (3.60)$$

$\forall X, Y$ in V. Es folgt, dass

$$A^l{}_i \, g_{lk} \, A^k{}_j = g_{ij} \qquad (3.61)$$

sein muss, wenn A orthogonal ist.

Wir überlassen es als Übung, das Transformationsverhalten von $(g_{ij}), \ldots$ unter Basistransformationen zu bestimmen.

Tensoren. Ein r-fach kovarianter, s-fach kontravarianter Tensor ist ein stetiges, multilineares Funktional

$$T : \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{(V^* \times \cdots \times V^*)}_{s \text{ mal}} \to \mathbb{R}$$

$$T : (X_1, \ldots, X_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) \mapsto T(X_1, \ldots, X_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) \in \mathbb{R} \tag{3.58}$$

Komponenten von T.

$$T^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_r} = T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}, \varepsilon^{i_1}, \ldots, \varepsilon^{i_s}) \tag{3.59}$$

Linearer Raum aller r-fach kovarianten, s-fach kontravarianten Tensoren.

$$\bigotimes_r^s V \equiv \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r \text{ mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s \text{ mal}}, \tag{3.60}$$

mit Basis

$$\{\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s}\}, \tag{3.61}$$

definiert durch

$$\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s} \left(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r}, \varepsilon^{l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_s}\right)$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{r} \delta^{i_\alpha}_{k_\alpha} \prod_{\beta=1}^{s} \delta^{l_\beta}_{j_\beta} . \qquad (3.62)$$

Für $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s$ in Hom V definieren wir

$$\left(A_1^* \otimes \cdots \otimes A_r^* \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_s T\right)\left(X_1, \ldots, \xi_s\right)$$

$$= T\left(A_1 X_1, \ldots, A_r X_r, B_1^* \xi_1, \ldots, B_s^* \xi_s\right), \qquad (3.63)$$

d.h. $A_1^* \otimes \cdots \otimes A_r^* \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_s \in \operatorname{Hom}\left(\bigotimes_r^s V\right)$.

<u>Transformation der Tensorkomponenten unter Basistransformationen.</u>

$$\tilde{T}^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_r} = T\left(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_r}, \tilde{\varepsilon}^{i_1}, \ldots, \tilde{\varepsilon}^{i_s}\right)$$

$$= R^{k_1}{}_{j_1} \cdots R^{k_r}{}_{j_r} R_{l_1}{}^{i_1} \cdots R_{l_s}{}^{i_s} T\left(e_{k_1}, \ldots, \varepsilon^{l_s}\right)$$

$$= R^{k_1}{}_{j_1} \cdots R^{k_r}{}_{j_r} R_{l_1}{}^{i_1} \cdots R_{l_s}{}^{i_s} T^{l_1 \cdots l_s}_{k_1 \cdots k_r} , \qquad (3.64)$$

mit $R_i{}^j = ij$ Matrixelement von $(R^{-1})^*$.

Man sieht leicht, dass

$$\operatorname{Hom} V \cong V \otimes V^* \tag{3.65}$$

Denn $A \in \operatorname{Hom} V$ definiert $T_A \in V \otimes V^*$ durch

$$T_A(\xi, X) = \xi(AX), \tag{3.66}$$

und für $T \in V \otimes V^*$ ist $A_T \in \operatorname{Hom} V$ durch

$$(A_T X)^j = \varepsilon^j(A_T X) := T(\varepsilon^j, X) \tag{3.67}$$

definiert. Für $T \in V \otimes V^*$ definieren wir

$$\operatorname{Sp} T = \sum_j T(\varepsilon^j, e_j) = T^j_j . \tag{3.68}$$

<u>Operationen auf Tensoren.</u>

(a) <u>Tensorprodukt.</u>

$$T \in \bigotimes^s_r V,\ S \in \bigotimes^q_p V \longmapsto T \otimes S \in \bigotimes^{s+q}_{r+p} V$$

(b) <u>Verjüngen.</u>

$$\operatorname{Sp}^j_i : \bigotimes^s_r V \longrightarrow \bigotimes^{s-1}_{r-1} V,$$

$1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq s.$

(c) <u>Rauf- und Runterziehen von Tensorindizes.</u>

$G : V \to V^*$ sei eine Metrik

$$G^j_i : \bigotimes^s_r V \longrightarrow \bigotimes^{s-1}_{r+1} V$$

definiert durch

$$(G_i^j T)(X_1, \dots, X_{r+1}, \xi^1, \dots, \xi^{s-1})$$

$$= T(X_1, \dots, \check{X}_i, \dots, X_{r+1}, \xi^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } j.}}{G X_i}, \dots, \xi^{s-1})$$

In Komponenten,

$$(G_i^j T)^{i_1 \dots i_{s-1}}_{j_1 \dots j_{r+1}} = g_{j_i l} \, T^{i_1 \dots i_{j-1} \, l \, i_{j+1} \dots i_s}_{j_1 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_r} \qquad (3.69)$$

Analog: $G^{*}{}^{i}_{j} : \bigotimes^s_r V \to \bigotimes^{s+1}_{r-1} V$, $\qquad (3.70)$

gegeben durch (g^{kl}); etc..

Tensoranalysis.

Ein r-fach kovariantes, s-fach kontravariantes Tensorfeld, T, auf $\mathbb{E}^3$ ist eine Zuordnung eines Tensors in $\bigotimes^s_r T_p$ (T_p = Tangentialraum in p; → (3.2)) zu jedem Punkt $p \in \mathbb{E}^3$ so, dass für beliebige Vektorfelder $X_1, \dots, X_r$ Einsformen $\xi^1, \dots, \xi^s$

$$T(X_1, \dots, X_r, \xi^1, \dots, \xi^s)(p) \equiv$$

$$\equiv T(p)(X_1(p),\cdots,X_r(p),\xi^1(p),\cdots,\xi^s(p)),$$
$$(3.71)$$

$p \in \mathbb{E}^3$, eine glatte Funktion auf $\mathbb{E}^3$ ist.

Nun kann man auf Tensorfeldern punktweise all die oben eingeführten, algebraischen Operationen definieren. Ausserdem kann man Tensorfelder kovariant ableiten, und das Resultat ist wieder ein Tensorfeld:

$$(\nabla_X \xi)(Y) = \underbrace{X(\xi(Y))}_{\substack{\text{Richtungsableitung (3.4)}\\ \text{der Funktion } \xi(Y)}} - \xi(\nabla_X Y), \quad (3.72)$$

wo $\nabla_X Y$ wie in (3.40)–(3.43) definiert ist.

Nun setzt man für $T \in \otimes^s_r T_p$, X ein Vektorfeld

$$(\nabla_X T)(X_1,\cdots,X_r,\xi^1,\cdots,\xi^s)$$

Richtungsabl.

$$= X(T(X_1,\cdots,X_r,\xi^1,\cdots,\xi^s))$$
$$-\sum_{i=1}^{r} T(X_1,\cdots,\nabla_X X_i,\cdots,X_r,\xi^1,\cdots,\xi^s)$$
$$-\sum_{j=1}^{s} T(X_1,\cdots,X_r,\xi_1,\cdots,\nabla_X \xi^j,\cdots,\xi^s) \quad (3.73)$$

Aus der Definition von ∇_X folgt, dass für $T \in \bigotimes_r^s T_p$, $\nabla_X T$ wieder ein r-fach kovariantes, s-fach kontravariantes Tensorfeld ist.

Für $T \in \bigotimes_r^s T_p$ definieren wir

$$(\mathrm{div}_k T)^{i_1 \cdots i_{s-1}}_{j_1 \cdots j_r} = \nabla_l T^{i_1 \cdots \overset{\substack{k\text{te Stelle}\\ \downarrow}}{l} \cdots i_{s-1}}_{j_1 \cdots\cdots j_r} \in \bigotimes_r^{s-1} T_p, \tag{3.74}$$

und

$$(\mathrm{Div}_k T)^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots j_{r-1}} = \nabla_l g^{lm} T^{i_1 \cdots i_s}_{j_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow\\ k\text{te Stelle}}}{m} \cdots j_{r-1}}, \tag{3.75}$$

und das Resultat ist ein $(r-1)$-fach kovariantes, s-fach kontravariantes Tensorfeld.

In (3.74) und (3.75) ist ∇_l durch (3.43) gegeben.

<u>Formen.</u> <u>Total antisymmetrische Elemente</u> von $\bigotimes_r^0 T_p$ heissen <u>r-Formen</u>. Der Raum der r-Formen wird mit $\Lambda_r T_p = T_p^* \wedge \cdots \wedge T_p^*$

bezeichnet. Sei ω eine r-Form. Die äussere Ableitung, $d\omega$, ist durch

$$
\begin{aligned}
&(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r+1} (-1)^{i+1} X_i \left(\omega(X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, X_{r+1}\right) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \check{X}_i, \ldots, \check{X}_j, \ldots X_{r+1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

definiert; $d\omega$ ist eine $(r+1)$-Form.

Es gilt

$$
(d\omega)_{j_1 \cdots j_{r+1}}(p) = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^k \frac{\partial}{\partial \xi^{j_k}} \omega_{j_1 \cdots \check{j}_k \cdots j_{r+1}}(p)
$$

und daraus folgt, dass $d^2 = 0$.

Konkrete Ausdrücke in Polar-, Zylinder- .... Koordinaten für alle diese Dinge herzuleiten sei als Übungsaufgabe empfohlen!

3.3 Diffeomorphismen und Flüsse

Sei Ω ein offenes Gebiet im physikalischen Raum $\mathbb{E}^3$;

$$\phi : \Omega \longrightarrow \Lambda := \phi(\Omega)$$

sei eine glatte Abbildung von Ω auf Λ, deren Umkehrabbildung

$$\phi^{-1} : \Lambda \longrightarrow \Omega$$

überall existiere und glatt sei. Man nennt ϕ einen <u>Diffeomorphismus</u> von Ω auf Λ. Die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ist dann ein Diffeo. von Λ auf Ω. Die Tangentialabbildung

$$(D\phi)_p : T_p \longrightarrow T_{\phi(p)} \tag{3.77}$$

ist wie folgt definiert: Für $X \in T_p$ ist

$$(D\phi)_p X = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\phi(p+hX) - \phi(p)\right) \tag{3.78}$$

Im Koordinaten ist $(D\phi)_p$ durch die 3×3 Matrix $\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial \xi^j}(p)\right)$ gegeben, mit

$$\left(\left(D\phi\right)_p X\right)^j(\phi(p)) = \frac{\partial\phi^j}{\partial\xi^i}(p)\,\Xi^i(p) \tag{3.79}$$

Sei $\omega \in T^*_{\phi(p)}$ eine 1-Form. Wir definieren den <u>Pull-back</u> $\phi^* : T^*_{\phi(p)} \longrightarrow T^*_p$ durch

$$(\phi^*\omega)_p(X) = \omega\left(\left(D\phi\right)_p X\right), \tag{3.80}$$

$\forall X \in T_p$. In Koordinaten,

$$(\phi^*\omega)_j(p) = \frac{\partial\phi^i}{\partial\xi^j}(p)\,\omega_i(\phi(p)). \tag{3.81}$$

<u>Deformationen.</u> Im <u>kräftefreien Grundzustand</u> seien die Positionen der Teilchen eines materiellen Mediums durch die Punkte p eines offenen Gebiets Ω im physikalischen Raum gegeben. Nun mögen Kräfte auf das Medium einwirken. Die neuen Positionen der Teilchen seien durch

$$x = \phi(p) \tag{3.82}$$

gegeben, wo ϕ ein Diffeo. $\Omega \to \Lambda$ sei, mit $\det(D\phi)_p > 0$, $\forall p$; (keine Reflektionen!).